Blatt 3 (optional)

Aufgabe 1

Es soll ein Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ an einer Stelle x ausgewertet werden. Um Multiplikationen zu sparen, spaltet man $p(x)$ durch Klammerung auf in

$$p(x) = ((...((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + ...)x + a_1)x + a_0$$

und berechnet die Klammern sukzessive von innen nach außen. Diese Vorgehensweise wird als Hornerschema bezeichnet. Implementiere eine Funktion `horner(x,a)` die ein Polynom mit dem Hornerschema an der Stelle x auswertet. Die Koeffizienten a_i werden dabei im Eingabevektor `a` übergeben. Anschließend modifiziere gegebenenfalls das Programm so, dass es mehrere Funktionswerte berechnen kann, falls `x` ein Vektor ist.

Aufgabe 2

Bestimmung von π durch Zufallszahlen: Erzeuge n Paare von Zufallszahlen $[x(i)\ y(i)]$, wobei die $(x(i))_i$ und $(y(i))_i$ unabhängige, uniform auf $[0,1]$ verteilte Zufallsvaiablen sind. Es gilt $Z_n/n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi/4$ wobei Z_n die Anzahl der Punktepaare ist, die innerhalb des Einheitskreises liegen. Plotte den Viertel-Einheitskreis zusammen mit den Punkten in eine Graphik für verschiedene n. Färbe die Punkte innerhalb des Kreises rot, die anderen blau.
Hinweis: `help rand`

Aufgabe 3

Eine natürliche Zahl Z lässt sich für N Stellen und Basis b darstellen als

$$Z = \sum_{i=0}^{N-1} d_i b^i \hat{=} d_{N-1} d_{N-2} ... d_0 \qquad \text{für } d_i \in \{0, ..., b-1\}.$$

Schreibe eine Funktion `e=basiswechsel(d,b,c)`, welche eine in der Basis b gegebene natürliche Zahl in die Basis c umrechnet. Es ist dabei $d = (d_{N-1}...d_0)$ die Darstellung in der Basis b und $e = (e_{M-1}...e_0)$ die Darstellung in der Basis c.

Aufgabe 3

Lösen Sie die ODE

$$y'(t) = \frac{-ty}{\sqrt{2-y^2}},\ y(0) = 1\ , t \in [0,5] \tag{1}$$

mithilfe des expliziten Euler Verfahrens. Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

- Diskretisieren Sie das Intervall $[0,5]$ in $n+1$ äquidistante Stützstellen (s.d. $x_0 = 0$ und $x_i = \frac{5i}{n}$).
- Laufen Sie den Schritt von x_0 nach x_1 mit einer linearen Funktion welche in $y(0) = 1$ startet und die selbe Steigung besitzt, wie die Lösung von (1) an dem Anfangswert 0.
- Führen Sie dieses Verfahren nun fort, bis Sie bei $x_n = 5$ angekommen sind.

Plotten Sie die Lösung von (1) für $n = 5, 20, 100$. Dass die approximierte Lösung tatsächlich nah an der wahren Lösung des Problems liegt und Vieles mehr lernen Sie in dem Kurs Numerik von Differentialgleichungen.