Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
5. Juli 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $g = P(\mathbb{R}^2)$ die reelle projektive Gerade mit folgenden drei 4-Tupeln von Punkten auf g

(a)

$$P_0 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, P_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, P_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$P_0' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$P_0' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P_1'' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2'' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, P_3'' = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie welche 4-Tupel isomorph sind, d.h. für welches Paar von Tupeln gibt es eine Projektivität $g \to g$, welche den i-ten Tupeleintrag des einen Tupels auf den i-ten Tupeleintrag des anderen abbildet, für $i = 1, 2, 3, 4$. Geben Sie den jeweiligen Endomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ an.

Hinweis: Doppelverhältnis

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten den projektiven Raum $P := P(\mathbb{R}^4)$. Berechnen Sie den Schnitt der projektiven Gerade

$$g = P(\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}) \subset P$$

und der projektiven Hyperfläche

$$H = P(\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}) \subset P.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien N, H zwei Gruppen und $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass es genau eine Gruppe G mit Homomorphismen $i : N \to G$ und $j : H \to G$ gibt mit folgenden Eigenschaften.

(a) Für alle $n \in N, h \in H$ gilt

$$j(h)i(n)j(h)^{-1} = i(\psi(h)(n))$$

(b) Für jedes weitere Tripel $(G', i' : N \to G', j' : H \to G')$, sodass für alle $n \in N, h \in H$

$$j(h)i(n)j(h)^{-1} = i(\psi(h)(n))$$

gilt, gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \to G'$, sodass

$$i' = \Phi \circ i \quad \text{und} \quad j' = \Phi \circ j.$$

Hierbei heißt *Es gibt genau eine Gruppe*, dass diese Gruppe eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus. Oder in anderen Worte, gibt es Gruppen G_1 und G_2 welche beide zusammen mit passenden Gruppenhomomorphismen die Eigenschaften (a) und (b) erfüllen, dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $G_1 \to G_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Klassifizieren Sie alle Gruppen die ein semidirektes Produkt von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ sind. Zeigen Sie, dass es eine abelsche und eine nicht-abelsche Gruppe gibt.

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 11. Juli**.