

11. Übungsblatt (erschienen am 23.06.2022)

Aufgabe 11.1 (Votieraufgabe)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u \in C^2(\Omega)$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ und $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir definieren $v : M^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1$ durch

$$v(\xi) := u(M\xi) \quad \forall \xi \in M^{-1}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $v \in C^2(M^{-1}(\Omega))$ und dass

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} v(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) \right]_{x=M\xi},$$

wobei a_{ij} die Koeffizienten von $A := MBM^T$ sind.

Aufgabe 11.2 (Schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Zeigen Sie, dass das Maximumsprinzip in Satz 2.2 für allgemeine elliptische PDGLn der Form

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) = f \leq 0$$

mit (in jedem Punkt $x \in \Omega$) symmetrischer und positiv definiten Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ gilt. Machen Sie sich zuerst klar, warum die Aussage für konstante positiv definite Diagonalmatrizen gilt. Verwenden Sie nun Aufgabe 12.1 um die allgemeine Aussage zu zeigen. Nehmen Sie gegebenenfalls A zunächst als konstant (symmetrisch und positiv definit) an.

Aufgabe 11.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Betrachten Sie die PDGL

$$-\Delta u(x, y) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) = f(x, y), \quad (x, y)^T \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (1)$$

mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0, y) = b_1(y), \quad u(1, y) = b_2(y), \quad u(x, 0) = b_3(x), \quad u(x, 1) = b_4(x) \quad \text{für } x, y \in (0, 1).$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $h = 1/(n+1)$ ist durch

$$v^{(i+(j-1)n)} := (ih, jh) \in \Omega, \quad i, j = 1, \dots, n$$

eine äquidistante Diskretisierung von Ω mit Schrittweite h gegeben.

¹Wobei hier $M^{-1}(\Omega)$ auch für nicht invertierbare Matrizen einfach das Urbild von Ω unter M (als lineare Abbildung) beschreibt.

Ferner sei

$$F := (f^{(k)})_{k=1, \dots, n^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{mit} \quad f^{(k)} := f(v^{(k)})$$

und

$$U := (u^{(k)})_{k=1, \dots, n^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{mit} \quad u^{(k)} := u(v^{(k)}).$$

Durch Approximation der zweiten Ableitungen mit zentralen FDs in (1) erhält man:

$$\begin{aligned} f^{(k)} &= -[\Delta u(v)]_{v=v^{(k)}} \approx -D_{h,1}^2[u](v^{(k)}) - D_{h,2}^2[u](v^{(k)}) \\ &= -\frac{1}{h^2} (-4u(v^{(k)}) + u(v^{(k)} + he_1) + u(v^{(k)} - he_1) + u(v^{(k)} + he_2) + u(v^{(k)} - he_2)), \end{aligned}$$

wobei

$$D_{h,i}^2[u](v) := \frac{u(v + he_i) - 2u(v) + u(v - he_i)}{h^2}, \quad i = 1, 2.$$

Sind neben $v^{(k)}$ auch die Nachbarn $v^{(k)} \pm he_i$ (mit $i = 1, 2$) innere Punkte von Ω , so folgt daraus:

$$f^{(k)} \approx \frac{1}{h^2} (4u(v^{(k)}) - u(v^{(k-1)}) - u(v^{(k+1)}) - u(v^{(k-n)}) - u(v^{(k+n)})).$$

Ist (mindestens) einer der Nachbarn ein Randpunkt von Ω , so bekommt man einen analogen Ausdruck, bei dem die Dirichlet-Randbedingungen mit einfließen. Unter Verwendung der Kronecker-Multiplikation² gilt für

$$A_h := \frac{1}{h^2} (I_n \otimes T + T \otimes I_n), \quad T := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und einen geeigneten Vektor $B_h \in \mathbb{R}^n$ (abhängig von den Dirichlet-Randbed.) damit

$$A_h U + B_h \approx F.$$

Folglich ist $U_h := A_h^{-1}(F - B_h) \in \mathbb{R}^{n^2}$ eine Approximation an U .

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion.

```
function [U_h] = approx_U_h(f, b1, b2, b3, b4, n),
```

die U_h in Abhängigkeit von f , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 und $n \in \mathbb{N}$ berechnet. Bestimmen Sie dazu zuerst B_h .

(b) Berechnen und visualisieren Sie U_h für homogene Dirichlet-Randwerte, $n = 50$ und

$$f(x, y) := \begin{cases} 300 & \text{falls } (x, y) \in F_1 \setminus F_2, \\ 240 & \text{falls } (x, y) \in E_1 \cup E_2, \\ 180 & \text{falls } (x, y) \in M, \\ -60 & \text{falls } (x, y) \in F_2 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup M), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.35^2\},$$

²Für $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{a \times b}$ und $W \in \mathbb{R}^{c \times d}$ ist $M \otimes W := (m_{ij}W) \in \mathbb{R}^{ac \times bd}$.

$$\begin{aligned}
F_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.3^2\}, \\
E_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 0.4)^2 + (y - 0.6)^2 < 0.05^2\}, \\
E_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 0.6)^2 + (y - 0.6)^2 < 0.05^2\}, \\
M &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0.15^2 < (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.2^2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0.45\}.
\end{aligned}$$

(c) Berechnen und visualisieren Sie U_h für $b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv 0$, $b_4(x) = \sin(2\pi x)$, $n = 50$ und $f \equiv 0$.

Hinweis: Mit dem folgenden MATLAB-Code lässt sich U_h geeignet visualisieren:

```

h=1/(n+1);
U_h_matrix=reshape(U_h,n,n)';
[X,Y]=meshgrid(h:h:(1-h),h:h:(1-h));
surf(X,Y,U_h_matrix,'FaceColor','interp','EdgeAlpha',0);
xlabel('x-Achse');
ylabel('y-Achse');
zlabel('u(x,y)');

```

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 30.06.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.