Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2022
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

10. Übungsblatt (erschienen am 16.06.2022)

Aufgabe 10.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Formel der BDF-Methode aus Abschnitt 1.7.3 der Vorlesung für $m = 2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Adams-Bashforth Methode mit $m = 2$ aus Beispiel 1.49 der Vorlesung genau Konsistenzordnung 2 hat. Beschränken Sie sich dabei auf skalare autonome DGLn $y'(x) = f(y(x))$, wobei f die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 erfülle.

Hinweis: Entwickeln Sie $y_{i-1} = y(x_i - h)$ und $f_{i-1} = f(y(x_i - h))$ um $h = 0$.

Aufgabe 10.2 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Im Folgenden sollen Mehrschrittverfahren implementiert werden, die einen Näherungsgraphen `[xi, yi]` (mit konstanter Schrittweite $x_{i+1} - x_i = h > 0$) an den Lösungsgraphen eines AWPs der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x0) = y0 \in \mathbb{R}^d \quad \text{auf} \quad [x0, T]$$

berechnen. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [xi,yi] = Adams_Bashforth(x0,y0,h,f,T),
```

die das Verfahren aus Aufgabe 10.1 (b) implementiert. Verwenden Sie bei der Implementierung das Verfahren von Runge[1], um y_1 für den ersten Schritt des Mehrschrittverfahrens zu berechnen. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [xi,yi] = Milne_Simpson(x0,y0,h,f,fy,T,version),
```

die das Verfahren aus Aufgabe 9.4 implementiert. Verwenden Sie bei der Implementierung einmal (für version=1) das RKV

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} := \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

und einmal (für version=2) das Verfahren von Runge, um y_1 für den ersten Schritt des Mehrschrittverfahrens zu berechnen. Erstellen Sie jeweils einen Fehlerplot analog wie in Teil (b) von Aufgabe 5.4 (dort für RKVs) beschrieben.

Aufgabe 10.3 (Votieraufgabe)

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-w''(x) + b(x)w'(x) = 1, \quad x \in (0,1), \quad w(0) = w(1) = 0$$

mit $b \in C^2([0,1])$ eine eindeutige Lösung $w \in C^4([0,1])$ hat. Substituieren Sie dazu zunächst $v = w'$ und machen Sie einen Ansatz $v(x) = a(x) \exp\left(\int_0^x b(t)\mathrm{d}t\right)$.

---

[1] aus Abs. 1.3.4 der Vorlesung

Aufgabe 10.4 (Votieraufgabe)
Wir betrachten das Randwertproblem

$$-(a(x)u'(x))' + u(x) = f(x) \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

wobei $a \in C^3[0,1]$ sei mit $a > 0$. Wir diskretisieren auf einem äquidistanten Gitter $x_i = ih$ mit $h = \frac{1}{n+1}$ für $i = 1, ..., n$ durch

$$(a(x)u'(x))' \approx D_h^{2,a}[u](x) := \frac{1}{h^2}\left(a(x+h/2)(u(x+h)-u(x)) - a(x-h/2)(u(x)-u(x-h))\right). \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass für $u \in C^4([0,1])$

$$\|D_h^{2,a}[u](x_i) - (a(x_i)u'(x_i))'\| = \mathcal{O}(h^2)$$

.

(b) Stellen Sie mittels (2) die Diskretisierungsmatrix L_h zu (1) auf und zeigen Sie, dass diese invertierbar ist.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben** * soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 23.06.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**