

## 9. Übungsblatt (erschienen am 09.06.2022)

### Aufgabe 9.1 (Votieraufgabe)

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion der zweistufigen Methode in `ode23s` aus Beispiel 1.45 und plotten Sie das Stabilitätsgebiet der zweistufigen und der dreistufigen Methode in `MATLAB`.

### Aufgabe 9.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Betrachten Sie die in Beispiel 1.45 beschriebene dreistufige Methode zur Berechnung von  $\hat{y}$  in `ode23s` angewandt auf das autonome skalare AWP

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y'(x) = f(y(x)), \quad y(0) = y_0.$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen (für  $h \searrow 0$ )

(i)  $k_1 = f + haf'f + h^2a^2f'^2f + O(h^3)$ ,

(ii)  $k_2 = f + h\frac{1}{2}f'f + h^2((a - a^2)f'^2f + \frac{1}{8}f''f^2) + O(h^3)$ ,

(iii)  $k_3 = f + h(1 - a)f'f + h^2(\frac{1}{2}f''f^2 + a^2f'^2f) + O(h^3)$ ,

wobei hier die Abkürzungen  $f := f(y_0)$ ,  $f' := f'(y_0)$  und  $f'' := f''(y_0)$  verwendet werden.

*Hinweis zu (iii):* Es ist  $d_{31} + d_{32} = 2a$  und  $\frac{1}{2} - d_{31}a - \frac{1}{2}d_{32} + a = 2a^2$ .

(b) Zeigen Sie mithilfe von Teil (a), dass  $\hat{y}_1 = y(h) + O(h^4)$  gilt. *Hinweis:* Es ist  $4a - 2a^2 = 1$ .

### Aufgabe 9.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Im Folgenden sollen linear implizite Verfahren implementiert werden, die einen Näherungsgraphen  $[\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i]$  (mit konstanter Schrittweite  $x_{i+1} - x_i = h > 0$ ) an den Lösungsgraphen eines autonomen AWP's der Form

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d \quad \text{auf} \quad [x_0, T]$$

berechnen. Schreiben Sie `MATLAB`-Funktionen

```
function [xi,yi] = linear_impl_Euler(x0,y0,h,f,Jf,T)
```

bzw.

```
function [xi,yi] = linear_impl_midpoint(x0,y0,h,f,Jf,T),
```

die die linear impliziten Verfahren aus Beispiel 1.45 (a) bzw. (b) implementieren. Dabei soll mit  $\mathbf{Jf}$  die Ableitung  $f'(y)$  übergeben werden. Testen Sie die Funktionen analog Teil (c) Aufgabe 4.4.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben\*** und **Programmieraufgaben \*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 17.06.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

---

\*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.