Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2022
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

8. Übungsblatt (erschienen am 02.06.2022)

Aufgabe 8.1 (Votieraufgabe)

(a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion für die Crank-Nicolson Methode und prüfen Sie, ob die Methode A-stabil, L-stabil oder Isometrie-erhaltend ist.

(b) Beweisen Sie die Aussage aus Bsp. 1.36(c) der Vorlesung: zeigen Sie, dass die implizite Mittelpunktsregel A-stabil, jedoch nicht L-stabil, aber zusätzlich Isometrie erhaltend ist.

Aufgabe 8.2 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Betrachten Sie ein allgemeines 1-stufiges RKV

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|c} c & c \\ \hline & 1 \end{array}.$$

und bestimmen Sie die Menge der c mit $0 \leq c \leq 1$, so dass das zugehörige Verfahren A-stabil ist.

Aufgabe 8.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$R(\zeta) = \frac{2 + \zeta - \frac{1}{5}\zeta^2 + \zeta^3}{2 - \zeta}$$

nicht die Stabilitätsfunktion eines Runge-Kutta-Verfahrens mit Konsistenzordnung 2 ist.

Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Wir betrachten für $u : (0,1) \times (0,T) \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto u(x,t)$ und $T > 0$ die 1d-Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) \ = g(x). \tag{2}$$

Wir diskretisieren die x-Koordinate mit $N+1$ äquidistanten Gitterpunkten $x_j = x_{j-1} + \Delta x, j = 1, 2, \ldots, N$, wobei $x_0 = 0$ ist. Weiterhin approximieren wir die Ableitung 2. Ordnung in (1) durch den zentralen Differenzenquotient 2. Ordnung, sodass $u_j := u(x_j, t)$ für $j = 1, \ldots, N-1$ die folgende Gleichung erfüllen muss

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Dieses System von $N-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen kann in Matrixform geschrieben werden

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au \quad \text{mit} \quad u = (u_1, \ldots, u_{N-1})^T \quad \text{und} \quad A := \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \tag{3}$$

(a) Erstellen Sie einen plot des kleinsten Eigenwertes von A über $N = 1, ..., 50$.

Hinweis: Verwenden Sie `spdiags` um A zu erstellen, sowie `eigs` zur Bestimmung des Eigenwertes.

(b) Schreiben Sie `MATLAB`-Funktionen

```
[t,x,u] = ExpEuler(T,h,Delta_x,g,A)
[t,x,u] = ImpEuler(T,h,Delta_x,g,A)
[t,x,u] = Midpoint(T,h,Delta_x,g,A)
```

zur numerischen Lösung von (2)-(3) durch Verwendung des expliziten Eulerverfahrens, des impliziten Eulerverfahrens und der impliziten Mittelpunktsregel. Die Programme sollen in `[t,x,u]` die diskrete Approximation an den Graphen $(t, x, u(x, t))$ zurückgeben.

(c) Testen Sie ihre Programme aus dem (b)-Teil für $T = 2, \Delta x = 0.05$, A aus (3), $h_1 = 0.001$, $h_2 = 0.0015$, $h_3 = 0.003$, $h_4 = 0.03$ und der Anfangstemperaturverteilung

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Plotten Sie ihre Approximation `[x,u]` des expliziten und impliziten Eulerverfahrens, sowie der impliziten Mittelpunktsregel zum Zeitpunkt $t = 0.03$ für h_1 und h_2.

(ii) Plotten Sie ihre Approximation `[x,u]` des impliziten Eulerverfahrens und der impliziten Mittelpunktsregel zum Zeitpunkt $t = 0.03$ für h_3 und h_4.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben** * soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 09.06.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**