Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2022
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

7. Übungsblatt (erschienen am 27.05.2022)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)

Betrachten Sie das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{C}^d, \quad f \in GV. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass Runge-Kutta-Verfahren invariant unter Koordinatentransformationen sind. D.h., ist $T \in \mathbb{C}^{d\times d}$ eine reguläre Transformationsmatrix, y_1 die erste Iterierte eines RKVs angewandt auf das AWP (**??**) und $\hat{y}_1$ jene desselben RKVs angewandt auf das transformierte AWP

$$\hat{y}'(x) = \hat{f}(x, \hat{y}(x)), \quad \hat{y}(x_0) = \hat{y}_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \hat{y}_0 \in \mathbb{C}^d,$$

mit $\hat{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$, $\hat{f} : (x, y) \mapsto Tf(x, T^{-1}y)$ und $\hat{y}_0 := Ty_0$, dann gilt:

$$y_1 = T^{-1}\hat{y}_1$$

für h_0 klein genug.

Aufgabe 7.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Gegeben sei das AWP

$$y'(x) = Ay + \varphi(x),\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, sowie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ unendlich oft stetig differenzierbar. Seien (λ_k, v_k), $k = 1, ..., d$ die Eigenpaare von A, wobei die (v_k) eine ONB bilden. Zeigen Sie, dass $y^{(1)} = \sum_{k=1}^d \xi_k^{(1)} v_k$, wobei $y^{(1)}, \xi_k^{(1)}, k = 1, ..., d$ die jeweils ersten Iterierten eines RKVs, mit Schrittweite h_0 klein genug, angewandt auf (**??**) und

$$\xi'(x) = \lambda_k \xi(x) + (\varphi(x), v_k),\ \xi(0) = (y_0, v_k),\ k = 1, ..., d$$

sind.

Aufgabe 7.3 (Votieraufgabe)

Sei $R(\zeta) := 1 + \zeta b^T (I - \zeta A)^{-1} \mathbb{1} \in \mathbb{C}$ die Stabilitätsfunktion einer allgemeinen Runge-Kutta Methode. Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktionen der Verfahren von Runge und Heun. Plotten Sie das jeweilige Stabilitätsgebiet (Definition 1.38) dieser Methoden in `MATLAB`.

Aufgabe 7.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

(a) Schreiben Sie analog zu Aufgabe 5.4 eine `MATLAB`-Funktion

```
function [ti,yi] = impl_Runge_Kutta_Verfahren(t0,y0,h,f,fy,T,A,b,c),
```

für implizite Runge-Kutta-Verfahren, d.h. A ist keine linke untere Dreiecksmatrix. Verwenden Sie dazu das Newton-Verfahren[1] aus Aufgabe 6.1, mit Abbruchkriterium $\|F(x_k)\| \leq 10^{-8}$. Zusätzlich zu dem Parameter **f** (wie beim expl. Verfahren) soll mit dem Parameter **fy** die Ableitung $f_y(x, y)$ übergeben werden, welche für das Newton-Verfahren benötigt wird.

(b) Erstellen Sie mithilfe Ihrer `MATLAB`-Funktion für alle impliziten RKVs aus Abschnitt 1.3.4 Fehlerplots, wie in Teil (b) von Aufgabe 5.4 beschrieben.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben** * soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 02.06.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

[1] Es bietet sich hier an den `MATLAB`\-Operator und die MATLAB-Funktion **kron** zu verwenden.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**