Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2022
8. Mai 2022

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. Martin Möller
Jeonghoon So
Johannes Schwab

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

die Drehmatrix mit Winkel α.

(a) Zeigen Sie, dass $\det(D_\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie $D_0 = 1$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $D_{\alpha+\beta} = D_\alpha \cdot D_\beta$.

(c) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $\det(A) = 1$ von der Form D_α für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -13 & -2 & -4 \\ -2 & -10 & -2 \\ -4 & -2 & -13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

und $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der durch Matrixmultiplikation induzierte Endomorphismus. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts aus Eigenvektoren von φ_A.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ, Ψ selbstadjungierte Endomorphismen mit

$$\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$$

Zeigen Sie: Es gibt in V eine Orthogonalbasis $\{e_1, ..., e_n\}$, wobei die Vektoren $e_1, ..., e_n$ Eigenvektoren sowohl von Φ als auch von Ψ sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien Ψ und Φ Isometrien eines dreidimensionalen euklidischen Vektorraums V mit $\det(\Phi) = \det(\Psi) = 1$ und $\Phi, \Psi \neq \mathrm{id}_V$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine Drehung um eine Ursprungsgerade um einen Winkel $\omega_\Phi \in (0, \pi]$ ist.

Diese Ursprungsgerade $g = \ker(\Phi - \mathrm{id}_V)$ (bzw. $h = \ker(\Psi - \mathrm{id}_V)$) nennen wir Drehachse von Φ (bzw. Ψ).

(b) Zeigen Sie: Es ist genau $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$, wenn gilt

$$g = h \ \text{ oder } \ (g \perp h \ \text{ und } \ \omega_\Phi = \omega_\Psi = \pi).$$

Abgabe bis Beginn der Vorlesung um **10:15** am **Montag, den 16. Mai**.