Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2022
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

4. Übungsblatt (erschienen am 05.05.2022)

Aufgabe 4.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Es sei $y(x) : [x_i, b] \to \mathbb{R}$ die exakte Lösung des autonomen 1-dimensionalen AWPs

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_i) = y_i \in \mathbb{R},$$

wobei die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 der Vorlesung erfüllt sei.
Ferner sei y_{i+1} die numerische Approximation von $y(x_{i+1})$, die man durch einen Schritt mit dem Crank-Nicolson Verfahren mit der Schrittweite $h_i := x_{i+1} - x_i > 0$ ($x_{i+1} \in [x_i, b]$) erhält.

Bestimmen Sie ein maximales $p \in \mathbb{N}$, sodass

$$y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O({h_i}^{p+1}) \quad \text{für} \quad h_i \searrow 0$$

für alle AWP von obiger Form gilt, welche der Generalvoraussetzung genügen. Für die Landau-Notation gelte dabei die Konvention aus Bemerkung 1.20.

Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)
Betrachten Sie das lineare inhomogene AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \; y'(x) = Ay(x) + b, \; y(0) = y_0, \tag{1}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ diagonalisierbar sei, d.h. es existiert eine reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{d\times d}$, so dass $A = TDT^{-1}$ ist. Bestimmen Sie $v \in \mathbb{C}^d$ und $z_0 \in \mathbb{C}^d$, so dass für die Lösung z des (komplexwertigen) AWP

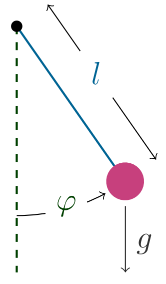
$$z' = Dz, \quad z(0) = z_0$$

gilt, dass $y(x) = Tz(x) + v$ das AWP (1) löst.

Aufgabe 4.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Die Differentialgleichung

$$l\varphi''(t) + g\sin(\varphi(t)) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

modelliert das Verhalten eines Pendels, wobei l dessen Länge und g die Gravitationskonstante beschreibt. Wir betrachten ein Pendelmodell mit $l = 10$ cm und $g = 9,81$ m/s^2.



(a) Formen Sie die DGL zweiter Ordnung in eine DGL erster Ordnung (in allgemeiner Form) um.

(b) Schreiben Sie MATLAB-Funktionen

```
[t,phi] = Pendel_Exp_Euler(t0,phi0,dotphi0,h,T),
[t,phi] = Pendel_Impl_Euler(t0,phi0,dotphi0,h,T),
[t,phi] = Pendel_Crank_Nicolson(t0,phi0,dotphi0,h,T),
```

zur numerischen Lösung des AWPs für die Startwerte $\varphi(t0) = \text{phi0}$, $\dot{\varphi}(t0) = \text{dotphi0}$ durch Verwendung des expliziten Eulers, des impliziten Eulers und der Crank-Nicolson Methode auf dem Intervall $[t0, T]$ mit Schrittweite h (in Sekunden). Die Programme sollen in `[t,phi]` die (diskrete) Approximation an den Graphen $(t, \varphi(t))$ mit $t \in [t0, T]$ zurückgeben. Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung impliziter Gleichungen, die im Fall der impliziten Methoden auftreten.

(c) Visualisieren Sie das Pendel für die Startwerte $t0 = 0$, $\text{phi0} = \frac{\pi}{4}$, $\text{dotphi0} = 0$ und eine Schrittweite von $h = 0.005$, sowie für den Endzeitpunkt $T = 7$. Verwenden Sie dabei die MATLAB-Funktion

```
visualisierePendel(t,phi,T),
```

welche Sie von der Veranstaltungshomepage herunterladen können. Geben Sie für alle drei Verfahren den finalen Plot zum Endzeitpunkt mit ab.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben** * soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 12.05.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**