Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2022
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)
Betrachten Sie wieder das AWP

$$\dot{y}(x) = f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2x & y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x} & 0 \leq y < x^2 \\ -2x & y \geq x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 0$$

auf $[0,1]$ (siehe Aufgabe 2.3). Zeigen Sie, dass f nicht lokal und gleichmäßig bezüglich x Lipschitz stetig in y ist und dass $y(x) = \frac{1}{3}x^2$ die eindeutige Lösung des AWPs ist.

Aufgabe 3.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Untersuchen Sie die Fixpunktiteration zur Lösung der Rekursionsgleichung

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

des impliziten Euler-Verfahrens. Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration konvergiert, falls f der Lipschitz-Bedingung

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \leq L\|y - z\|, \quad y, z \in \mathbb{R}^d\ ,\ x \in [a,b]$$

für ein $L > 0$ genügt und die Schrittweite h kleiner als $1/L$ gewählt wird. Geben Sie ein f an, für das die Fixpunktiteration für $h = 1/L$ divergiert.

Aufgabe 3.3 (Programmieraufgbe)[6 Punkte]
In dieser Aufgabe wollen wir die Dynamik des Liebesverhältnisses zwischen Romeo und Julia modellieren. Dabei bezeichnen wir mit $R(t)$ die Liebe, die Romeo gegenüber Julia empfindet und mit $J(t)$ die Liebe, die Julia zu Romeo hegt. Aufmerksame Beobachter haben folgende Entwicklung bemerkt:

- Für Julia ist die Sache ganz einfach: Je mehr Romeo sie liebt, desto mehr liebt sie auch ihn (und natürlich umgekehrt: je weniger Romeo sie liebt, desto weniger liebt sie ihn). Präzise formuliert:

$$\dot{J}(t) = R(t)$$

- Romeos's Gefühle lassen sich jedoch nicht so einfach beschreiben: Seine Liebe zu Julia lässt sofort nach, wenn Julia beginnt, ihn mehr zu lieben. Falls jedoch Julias Gefühle abkühlen, fängt er sofort an, sie mehr zu lieben. Präzise formuliert:

$$\dot{R}(t) = -J(t)$$

- Von Anfang an (also ab t = 0) liebt Julia ihren Romeo sehr: $J(0) = 4$. Allerdings ist Romeo Julia anfangs eher neutral eingestellt: $R(0) = 0$.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$\texttt{function } [y_1, y_2] = \textbf{Liebesdynamik}\texttt{(T,h,y0,modus)},$$

welche das Liebesverhältnis von Romeo und Julia zu den oben angegeben Anfangsbedingungen ($y0 = [4, 0]$) in den ersten $T = 50$ Tagen simuliert. Verwenden Sie hierbei die Schrittweite $h = 0.001$. Für `modus==1` soll die Funktion das explizite Eulerverfahren und für `modus==2` das implizite Eulerverfahren verwenden.

Schon ganz erschöpft von dem ganzen Durcheinander, stellt sich Julia ein Ultimatum: Wenn Romeo sie am 50.Tag nicht liebt (d.h. falls $R(50) \leq 0$), trennt sie sich von ihm, anderenfalls will sie mit ihm bis ans Ende ihrer Tage zusammen sein. Leiten Sie anhand Ihrer Simulation ab, ob Romeo und Julia zusammen bleiben werden.

(b) Die wahre Lösung des Problems ist gegeben durch

$$y(t) = 4 \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Plotten Sie den Fehler des expliziten und des impliziten Verfahrens für $h \to 0$.

Nach einem Abend voller Selbstreflexion bemerkt Romeo, dass er sich der Erfolge des Lebens erfreuen sollte, was dazu führt, dass seine Liebe zu ihr wächst, je mehr er sie liebt. Die Parameter der Differentialgleichungen verändern sich wie folgt:

$$\dot{R}(t) = \frac{1}{5}R(t) - \frac{2}{5}J(t) \qquad \text{und} \qquad \dot{J}(t) = \frac{4}{5}R(t). \tag{1}$$

(c) Modifizieren Sie Ihre Funktion, sodass sie Gleichung (1) zu den neuen Parametern löst. Wie würde die Geschichte mit der neuen Gleichung zu den selben Anfangswerten $y0 = [4, 0]$ enden?

Bemerkung: Die wahre Lösung des neuen Problems ist gegeben durch

$$y(t) = \exp\left(\frac{t}{5}\right) \begin{pmatrix} 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{5}\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{5}\right) \\ \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{5}\right) \end{pmatrix}.$$

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben** * soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 05.05.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**