

## 2. Übungsblatt (erschienen am 21.04.2022)

### Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)

Sei

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  und  $g^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k \geq 0$ .

### Aufgabe 2.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem  $C > 0$  eine Funktion  $\varphi$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ,
- $\varphi(x) = 1$ ,  $x \in (-\infty, C]$ ,
- $\varphi(x) = 0$ ,  $x \in [C + 1, \infty)$ .

*Hinweis:* Nutzen Sie Aufgabe 2.1

(b) Ist

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

stetig (in  $(x, y)$ ) und lokal und bzgl.  $x$  glm. Lipschitz stetig in  $y$ , so ist die abgeänderte Funktion

$$\tilde{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x, y) \mapsto \tilde{f}(x, y) := f(x, y)\varphi(\|y\|^2)$$

stetig (in  $(x, y)$ ) und global und bzgl.  $x$  glm. Lipschitz stetig in  $y$ .

(c) Ist

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

in  $\mathcal{C}^\infty([a, b] \times \mathbb{R}^d)$ , so ist die abgeänderte Funktion

$$\tilde{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x, y) \mapsto \tilde{f}(x, y) := f(x, y)\varphi(\|y\|^2)$$

in  $\mathcal{C}^\infty([a, b] \times \mathbb{R}^d)$  und alle partiellen Ableitungen sind beschränkt.

### Aufgabe 2.3 (Votieraufgabe)

Für ein AWP

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

kann man zur analytischen Näherung an die Lösung  $y(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  die sogenannte **Picard-Iteration** verwenden:

$$y^{(k+1)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y^{(k)}(\tau))d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Es ist naheliegend,  $y^{(0)} \equiv y_0$  zu wählen.

(a) Bestimmen Sie eine Approximation an die Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \dot{y}(t) = y(t)^2 + t^2, \quad y(0) = 0,$$

indem Sie drei Iterationsschritte durchführen.

(b) Betrachten Sie das AWP

$$\dot{y}(x) = f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2x & y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x} & 0 \leq y < x^2 \\ -2x & y \geq x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 0$$

auf  $[0, 1]$ . Zeigen Sie, dass die Picard-Iteration für  $y^{(0)} \equiv 0$  nicht konvergiert.

### Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Seien  $S(t), I(t)$  und  $R(t)$  die Anzahl der gesunden, der infektiösen und der immunen/verstorbenen Individuen im SIR-Modell,  $y(t) = (S(t), I(t), R(t))$  und  $y(0) = (S(0), I(0), R(0))$  die Werte zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Die Funktion  $y(t)$  erfülle die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \\ \dot{R}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cS(t)I(t) \\ cS(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \gamma I(t) \end{pmatrix} =: F(t, y(t)).$$

Indem man die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt,

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \quad h > 0 \text{ klein,}$$

sieht man, wie man aus den Werten  $y(t)$  und  $F(t, y(t))$  eine Approximation an  $y(t+h)$  berechnen kann. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [S, I, R] = SIR(T, h, y0, c, gamma)
```

die so für die Parameter  $c, \gamma$  und  $y_0 = [S(0), I(0), R(0)]$  die Entwicklung von  $y(t)$  bis zu einem Zeitpunkt  $T > 0$  approximiert. Unterteilen Sie dazu das Zeitintervall  $[0, T]$  äquidistant mit Schrittweite  $h$ . Erstellen Sie zwei Plots für die Werte

$$(T, h, y_0, \gamma) = \left( 500, 0.005, [8 * 10^7, 5 * 10^4, 10^5], \frac{\ln(0.1)}{-14} \right),$$

sowie

$$c = \frac{1.1\gamma}{S(0) + I(0) + R(0)} \text{ (niedrige Infektionsrate) und } c = \frac{3\gamma}{S(0) + I(0) + R(0)} \text{ (hohe Infektionsrate).}$$

- Zu **schriftlichen Aufgaben\*** und **Programmieraufgaben \*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 28.04.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

---

\*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.