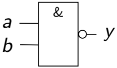
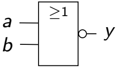
Digitaltechnik

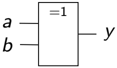
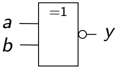
Vorsemesterkurs
Sommersemester 2024
Ronja Düffel

03. April 2024

Verknüpfungen $\barwedge$, $\overline{\vee}$

Operator	Name	Wahrheitstabelle	Schaltzeichen	Funktion
$\barwedge$	NAND	$\begin{array}{cc\|c} a & b & \overline{a \wedge b} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$		$y = f(a, b) = \overline{a \wedge b}$
$\overline{\vee}$	NOR	$\begin{array}{cc\|c} a & b & \overline{a \vee b} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$		$y = f(a, b) = \overline{a \vee b}$

Verknüpfungen $\oplus$, $\overline{\oplus}$

Operator	Name	Wahrheitstabelle	Schaltzeichen	Funktion
$\oplus$	XOR	$\begin{array}{cc\|c} a & b & a \oplus b \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$	 	$y = f(a, b) = a \oplus b$
$\overline{\oplus}$	XNOR	$\begin{array}{cc\|c} a & b & \overline{a \oplus b} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$	 	$y = f(a, b) = \overline{a \oplus b}$

Vollständige Operatorensysteme

Definition (Operatorensystem)

Menge von Operatoren, die es erlauben, jede beliebige Schaltfunktion darzustellen.

Satz

Die Verknüpfungen $\overline{\wedge}$ *und* $\overline{\vee}$ *bilden jeweils ein vollständiges Operatorensystem*

Operatorensystem	**Negation**	**Konjunktion**	**Disjunktion**
$\wedge, \vee, \overline{}$	$\overline{a}$	$a \wedge b$	$a \vee b$
$\overline{\wedge}$	$\overline{a \wedge a}$	$\overline{(\overline{a \wedge b}) \wedge (\overline{a \wedge b})}$	$\overline{(\overline{a \wedge a}) \wedge (\overline{b \wedge b})}$
$\overline{\vee}$	$\overline{a \vee a}$	$\overline{(\overline{a \vee a}) \vee (\overline{b \vee b})}$	$\overline{(\overline{a \vee b}) \vee (\overline{a \vee b})}$

Minterme

Definition (Minterm)

Konjunktionsterm ($\wedge$-Verknüpfung), der alle Eingangsvariablen einer Schaltfunktion enthält.

Jeder Minterm hat nur bei einer einzigen Wertekombination der Eingangsvariablen den Wert 1.

a	b	$m_0 = \overline{a} \wedge \overline{b}$	$m_1 = \overline{a} \wedge b$	$m_2 = a \wedge \overline{b}$	$m_3 = a \wedge b$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

Merke: Eingangsvariablen mit UND verknüpfen und alle negieren, deren Wert 0 ist.

Maxterme

Definition (Maxterm)

Disjunktionsterm ($\vee$-Verknüpfung), der alle Eingangsvariablen einer Schaltfunktion enthält.

Jeder Maxterm hat nur bei einer einzigen Wertekombination der Eingangsvariablen den Wert 0.

a	b	$M_0 = a \vee b$	$M_1 = a \vee \overline{b}$	$M_2 = \overline{a} \vee b$	$M_3 = \overline{a} \vee \overline{b}$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Merke: Eingangsvariablen mit ODER verknüpfen und alle negieren, deren Wert 1 ist.

Min- und Maxterme

Indizes der Min- und Maxterme ergeben sich direkt aus der Belegung der Schaltvariablen, wenn man diese als Dualzahl auffasst.

a	b	Index	Minterm	Maxterm
0	0	0	$m_0 = \overline{a} \wedge \overline{b}$	$M_0 = a \vee b$
0	1	1	$m_1 = \overline{a} \wedge b$	$M_1 = a \vee \overline{b}$
1	0	2	$m_2 = a \wedge \overline{b}$	$M_2 = \overline{a} \vee b$
1	1	3	$m_3 = a \wedge b$	$M_3 = \overline{a} \vee \overline{b}$

Beispiel (Schaltfunktion durch Min- bzw. Maxterme darstellen)

$$f(a, b) = m_0 \vee m_2 = (\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{b})$$

$$g(b, a) = m_0 \vee m_2 = (\overline{b} \wedge \overline{a}) \vee (b \wedge \overline{a})$$

Reihenfolge der Eingangsvariablen ist wichtig!!!

Normalformen

- standardisierte Darstellungsformen für Schaltfunktionen

Definition (Normalformen)

- **DNF:** *disjunktive Normalform, Ver-ODER-ung von UND-Termen*
  $g(a, b, c) = (a \wedge c) \vee (\overline{a} \wedge b) = ac \vee \overline{a}b$
- **KDNF:** *kanonische disjunktive Normalform*
  $g(a, b, c) = (\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) = \overline{a}b\overline{c} \vee \overline{a}bc \vee a\overline{b}c \vee abc$
- **KNF:** *konjunktive Normalform, Ver-UND-ung von ODER-Termen*
  $g(a, b, c) = (\overline{a} \vee c) \wedge (a \vee b)$
- **KKNF:** *kanonische konjunktive Normalform*
  $g(a, b, c) = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee b \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)$

Erstellen der DNF bzw. KNF

- durch Umformen der Schaltfunktion nach Gesetzen der Schaltalgebra.

Beispiel (Erstellen der DNF)

$$
\begin{aligned}
g(a,b,c) &= (a \vee b) \wedge (\overline{a \wedge \overline{c}}) \vee (b \wedge c) && \textit{De Morgan}\\
&= (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{\overline{c}}) \vee (b \wedge c) && \\
&= (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee c) \vee (b \wedge c) && \\
&= ((a \vee b) \wedge \overline{a}) \vee ((a \vee b) \wedge c) \vee (b \wedge c) && \textit{Distributivgesetz}\\
&= ((\overline{a} \wedge a) \vee (\overline{a} \wedge b)) \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \vee (b \wedge c) && \textit{Distributivgesetz}\\
&= 0 \vee (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge c) && \\
&= (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge c) && \textit{Reduktion}\\
&= (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) && \textit{Idempotenz}
\end{aligned}
$$

Erstellen der KNF

Beispiel

$$
\begin{aligned}
g(a,b,c) &= (a \lor b) \land (\overline{a \land \overline{c}}) \lor (b \land c) \\
&= (a \lor b) \land (\overline{a} \lor \overline{\overline{c}}) \lor (b \land c) && \textit{De Morgan} \\
&= (a \lor b) \land (\overline{a} \lor c) \lor (b \land c) \\
&= (a \lor b) \land (\overline{a} \lor b \lor c) \land (\overline{a} \lor c \lor c) && \textit{Distributivgesetz} \\
&= (a \lor b) \land (\overline{a} \lor b \lor c) \land (\overline{a} \lor c) && \textit{Vereinfachen}
\end{aligned}
$$

Ablesen KDNF und KKNF

- KDNF enhält alle Minterme für die die Funktion den Wert 1 hat.
- KKNF enhält alle Maxterme für die die Funktion den Wert 0 hat.

Beispiel

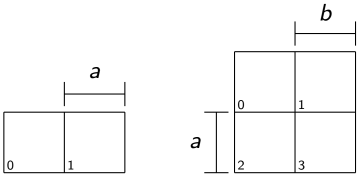
$g(a, b, c) = (a \lor b) \land (\overline{a \land \overline{c}}) \lor (b \land c)$

a	b	c	$g(a,b,c)$	*Minterme*	m_i	*Maxterme*	M_i
0	0	0	0	$\overline{a} \land \overline{b} \land \overline{c}$	m_0	$a \lor b \lor c$	M_0
0	0	1	0	$\overline{a} \land \overline{b} \land c$	m_1	$a \lor b \lor \overline{c}$	M_1
0	1	0	1	$\overline{a} \land b \land \overline{c}$	m_2	$a \lor \overline{b} \lor c$	M_2
0	1	1	1	$\overline{a} \land b \land c$	m_3	$a \lor \overline{b} \lor \overline{c}$	M_3
1	0	0	0	$a \land \overline{b} \land \overline{c}$	m_4	$\overline{a} \lor b \lor c$	M_4
1	0	1	1	$a \land \overline{b} \land c$	m_5	$\overline{a} \lor b \lor \overline{c}$	M_5
1	1	0	0	$a \land b \land \overline{c}$	m_6	$\overline{a} \lor \overline{b} \lor c$	M_6
1	1	1	1	$a \land b \land c$	m_7	$\overline{a} \lor \overline{b} \lor \overline{c}$	M_7

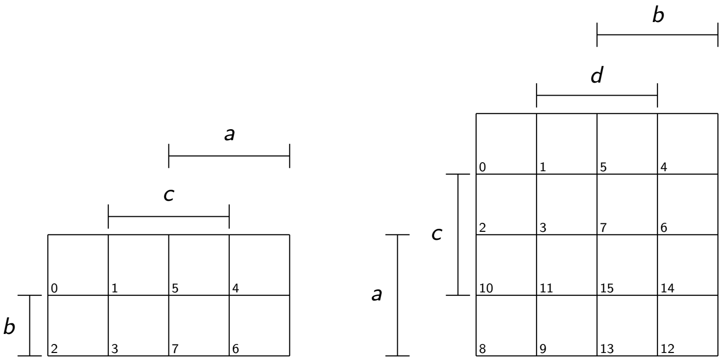
- KDNF: $(\overline{a} \land b \land \overline{c}) \lor (\overline{a} \land b \land c) \lor (a \land \overline{b} \land c) \lor (a \land b \land c)$
- KKNF: $(a \lor b \lor c) \land (a \lor b \lor \overline{c}) \land (\overline{a} \lor b \lor c) \land (\overline{a} \lor \overline{b} \lor c)$

KV-Diagramme

- benannt nach Edward W. Veitch und Maurice Karnaugh
- graphische Darstellung einer Wahrheitstabelle

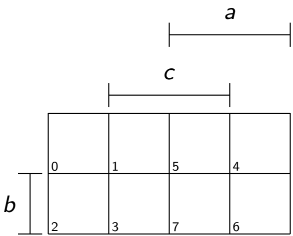


KV-Diagramme für 3- und 4-Eingangsvariablen



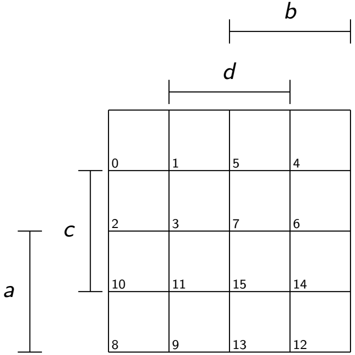
Beispiel KV-Diagramm (3-stellig)

$$h(a,b,c) = abc \vee \bar{a}b\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c}$$



Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)

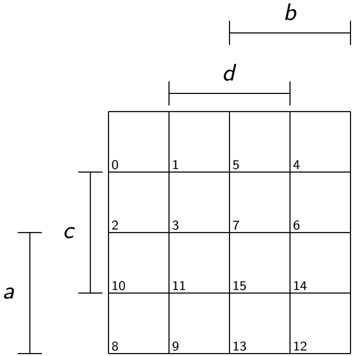
$$g(a, b, c, d) = abcd \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee ab\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{b}cd$$



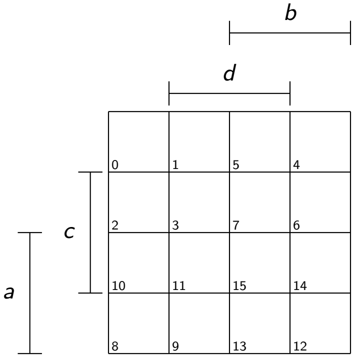
Fragen?

?

Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)



Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)



Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)