Digitaltechnik

Vorsemesterkurs
Sommersemester 2024
Ronja Düffel

02. April 2024

Informationsverarbeitung in digitalen Systemen

- Codierung und Verarbeitung in wertdiskreten Zuständen
- zwei Zustände:

0	1
false	true

- technisch als Spannungspegel:

hohe Spannung	$\rightarrow$	H
niedrige Spannung	$\rightarrow$	L

  - positive Logik: H $\leftarrow$ 1, L $\leftarrow$ 0
  - negative Logik: H $\leftarrow$ 0, L $\leftarrow$ 1

Binärcode

- Zeichen: 0 1 (*Bit*, 8 Bit $\widehat{=}$ 1 Byte)
- n-stellige Binärzahl: $Z_2 = z_{n-1}z_{n-2}\dots z_1 z_0$
- Interpretation: Bit z_i hat Gewicht 2^i

$$Z_{10} = g(Z_2) = z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + z_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + z_1 \cdot 2^1 + z_0 \cdot 2^0$$

- Allgemein für Zahlen zur Basis b:

$$Z_{10} = g(Z_b) = z_{n-1} \cdot b^{n-1} + z_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + z_1 \cdot b^1 + z_0 \cdot b^0$$

Beispiel (im Dezimalsystem)

$$425_{10} = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 400 + 20 + 5 = 425$$

Beispiel Binärsystem

- binär $\rightarrow$ dezimal

$$\begin{aligned}11110101_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 245_{10}\end{aligned}$$

- dezimal $\rightarrow$ binär
  durch 2 teilen bis 0 rauskommt und Reste von *rechts nach links*! notieren.
  Beispiel: 197_{10}

$$\begin{array}{rlr} 197 : 2 = 98 & \text{Rest } 1 & z_0 \\ 98 : 2 = 49 & \text{Rest } 0 & z_1 \\ 49 : 2 = 24 & \text{Rest } 1 & z_2 \\ 24 : 2 = 12 & \text{Rest } 0 & z_3 \\ 12 : 2 = 6 & \text{Rest } 0 & z_4 \\ 6 : 2 = 3 & \text{Rest } 0 & z_5 \\ 3 : 2 = 1 & \text{Rest } 1 & z_6 \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1 & z_7 \end{array}$$

$$197_{10} = 11000101_2$$

Schaltalgebra

Definition (Algebra)

Unter einer Algebra versteht man eine Menge von Elementen und Verknüpfungen auf dieser Menge.

z.Bsp.:

$$(\mathbb{R}, \cdot, +)$$

Schaltalgebra:

$$(\{1, 0\}, \wedge, \vee, {}^{-})$$

Definition (Schaltfunktion)

Eine Schaltfunktion ist eine Gleichung der Schaltalgebra, die die Abhängigkeit einer oder mehrerer binärer Schaltvariablen y (Ausgangs-) von einer oder mehreren, unabhängigen binären Schaltvariablen x (Eingangsvariable(n))beschreibt.
Handelt es sich um mehrere Aus- bzw. Eingangsvariablen, so sind x und y Vektoren. $x = (a, b, c, \dots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$

Beispiel Schaltfunktion

$$y = a \wedge b \qquad f(a,b) = a \wedge b$$
$$y' = \overline{a} \vee b \qquad g(a,b) = \overline{a} \vee b$$
$$y'' = \overline{a \vee b \wedge \overline{c}} \qquad h(a,b,c) = \overline{a \vee b \wedge \overline{c}}$$

Funktion der allgemeinen Algebra:

$$y = 3x + 4 \qquad f(x) = 3x + 4$$

Noch ein paar Begriffe

Definition

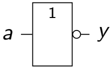
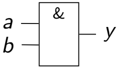
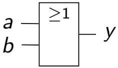
Schaltvariable: *binäre Variable, kann die Werte* 0 *oder* 1 *annehmen*

Stelligkeit: *Die Stelligkeit einer Schaltfunktion ist die Anzahl ihrer Eingangsvariablen.*

z.B.: $f(a) = \overline{a}$ *ist einstellig,*
$y = \overline{a} \vee b$ *ist zweistellig,*
$g(a, b, c, d) = (a \vee b) \wedge (a \wedge d)$ *ist vierstellig.*

Belegung: *Die Belegung einer Schaltvariablen ist die Zuweisung eines konkreten Werts* (0 *oder* 1) *an eine Schaltvariable.*
Die Belegung der Schaltvariablen einer Schaltfunktion kann als Vektor angegeben werden.
Bsp: Belegung $(1, 0)$ *für die Funktion* $g(a, b)$ *bedeutet* a *wird* 1 *und* b *der Wert* 0 *zugewiesen.*

Grundverknüpfungen $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$

<table>
<tr><th>Operator</th><th>Name</th><th>Wahrheitstabelle</th><th>Schaltzeichen</th><th>Funktion</th></tr>
<tr><td>$\overline{}$</td><td>NICHT, NOT, Komplement, Negation</td><td>$\begin{array}{c|c} a & \bar{a} \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$</td><td>
</td><td>$y = f(a) = \bar{a}$</td></tr>
<tr><td>$\wedge$</td><td>UND, AND, Konjunktion</td><td>$\begin{array}{cc|c} a & b & a \wedge b \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$</td><td>
</td><td>$y = f(a, b) = a \wedge b$</td></tr>
<tr><td>$\vee$</td><td>ODER, OR, Disjunktion</td><td>$\begin{array}{cc|c} a & b & a \vee b \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$</td><td>
</td><td>$y = f(a, b) = a \vee b$</td></tr>
</table>

Darstellung von Schaltfunktionen

Vier gleichwertige Darstellungsformen von Schaltfunktionen

- Wahrheitstabelle
- Funktionsgleichung
- Schaltzeichen
- KV-Diagramm (machen wir morgen)

Wahrheitstabelle

- enthält alle möglichen Belegungen der Eingangsvariablen und zugehörigen Funktionswert

Beispiel

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Bei n Eingangsvariablen 2^n Kombinationen.

Funktionsgleichung

- Jede Schaltfunktion kann allein durch die Grundverknüpfungen $\overline{}$, $\wedge$ und $\vee$ dargestellt werden.

Beispiel

- $g(a, b, c) = a \wedge \overline{b} \vee c$
- $k(a, b, c) = a \wedge b \vee \overline{a} \wedge c$

- Es gilt Negation vor Konjunktion vor Disjunktion. Also $\overline{}$ vor $\wedge$ vor $\vee$.
- Klammern setzen, um Auswertungsreihenfolge zu verändern

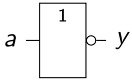
Beispiel

- $f(a, b, c) = a \vee b \wedge c$
- $h(a, b, c) = (a \vee b) \wedge c$

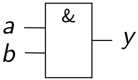
Beispiel

a	b	c	$f(a,b,c) = a \vee b \wedge c$	$a \vee b$	$h(a,b,c) = (a \vee b) \wedge c$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

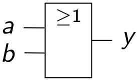
Schaltzeichen



NICHT-Gatter

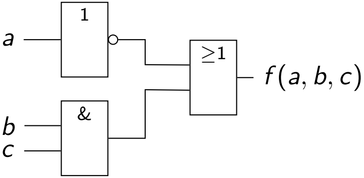


UND-Gatter

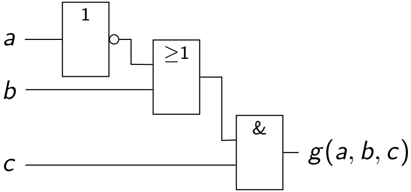


ODER-Gatter

$$f(a, b, c) = \overline{a} \vee b \wedge c = \overline{a} \vee (b \wedge c)$$



$$g(a, b, c) = (\overline{a} \vee b) \wedge c$$



Gleichheit von Schaltfunktionen

Definition

Zwei Schaltfunktionen sind genau dann gleich, wenn sie bei derselben Belegung der Eingangsvariablen, dasselbe Ergebnis in Bezug auf die Ausgangsvariable y haben.

Beispiel

$$f(a,b) = a \wedge b$$

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$g(a,b) = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$$

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \vee \overline{b}$	$\overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1

Gesetze der Schaltalgebra

Kommutativgesetze:

- $a \wedge b = b \wedge a$
- $a \vee b = b \vee a$

Distributivgesetze:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Absorptionsgesetze:

- $a \wedge (a \vee b) = a$
- $a \vee (a \wedge b) = a$

Reduktionsgesetze:

- $a \wedge 0 = 0$
- $a \vee 0 = a$
- $a \wedge 1 = a$
- $a \vee 1 = 1$

Resolutionsregeln:

- $(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a$
- $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$

De Morgan'sche Regeln:

- $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$
- $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

Beispiel

z.Zg:

$$\overline{\overline{a} \vee \overline{b}} = a \wedge b$$

$$\begin{aligned} g(a, b) &= \overline{\overline{a} \vee \overline{b}} && \textit{De Morgan'sche Regeln} \\ &= \overline{\overline{a}} \wedge \overline{\overline{b}} \\ &= a \wedge b \end{aligned}$$

Fragen?

?

Wahrheitstabelle

Bsp: $f(a, b, c) = 1$ g.d.w. eine ungerade Anzahl der Eingangsvariablen hat den Wert 1

- alle Belegungen der Eingangsvariablen
- zugehöriger Funktionswert der Ausgangsvariable
- Wahrheitstabelle für n Variablen hat 2^n Zeilen

a	b	c	$y = f(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

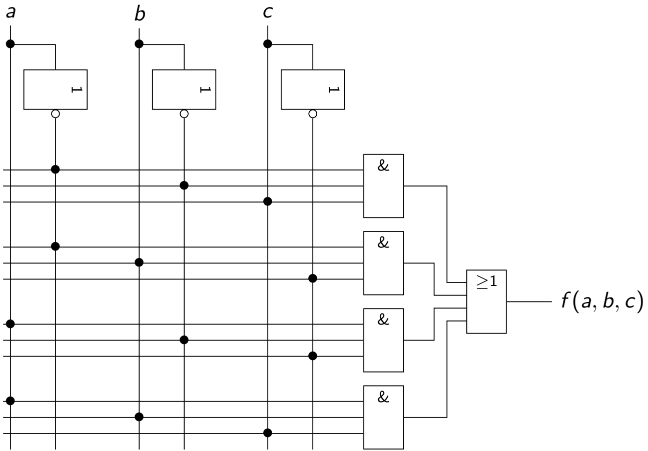
Funktionsgleichung

Bsp: $f(a,b,c) = (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$

a	b	c	$(\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c)$	$(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c})$	$(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$	$(a \wedge b \wedge c)$	$f(a,b,c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1

Schaltzeichen

$$f(a,b,c) = (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$$



Fragen?

?