6. Übungsblatt (erschienen am 17.01.2022)

Aufgabe 6.1 (Schriftliche Aufgabe)
Sei H Hilbertraum, $b : H \times H \to \mathbb{R}$ und $l : H \to \mathbb{R}$ seien eine Bilinear- und eine Linearform, welche die Voraussetzungen von Satz 2.41 (Lax-Milgram) erfüllen (mit $\beta > 0$ und $C > 0$). Seien $u, v \in H$. Die durch das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle_b := b(u, v)$ induzierte Norm $\|u\|_b := \sqrt{\langle u, u\rangle_b}$ heißt *Energienorm*. Wir beobachten, dass diese äquivalent zur H-Norm ist

$$\sqrt{\beta}\,\|u\| \le \|u\|_b \le \sqrt{C}\,\|u\| \quad \forall u \in H.$$

(a) Sei $\bar{u} \in H$ die eindeutige Lösung von $b(\bar{u}, v) = l(v)$ für alle $v \in H$. Weiterhin sei V ein endlichdimensionaler abgeschlossener Teilraum von H versehen mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$ bzw. $\|\cdot\|_b$. Dann bezeichnet $\tilde{u}$ die *Galerkin-Projektion* von $\bar{u}$ auf V. Zeigen Sie folgende Variante des Céa-Lemmas:

(i) $\|\bar{u} - \tilde{u}\|_b = \inf_{v\in V} \|\bar{u} - v\|_b$.

(ii) $\|\bar{u} - \tilde{u}\| \le \sqrt{\frac{C}{\beta}} \inf_{v\in V} \|\bar{u} - v\|$.

(b) Zeigen Sie außerdem, dass für eine beliebige Bilinearform $b : H \times H \to \mathbb{R}$ allgemein gilt: b ist genau dann stetig, wenn ein $C < \infty$ existiert so dass $|b(u, v)| \le C\,\|u\|\,\|v\|$ für alle u, v mit $\|u\| = \|v\| = 1$.

Aufgabe 6.2 (Votieraufgabe)
Wir übernehmen die Notation von Übungsblatt 5 und insbesondere von Aufgabe 5.2.
Für $u, \tilde{u}, v \in V^{\mathcal{T}}$, $D \subset \Omega$ und $\tau \in \mathbb{R}$ seien die Bilinearform und die Linearform

$$b(u, v) := \int_\Omega \tau \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad f(v) := \int_\Omega \tau \chi_D(x)v(x) + \tilde{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

gegeben. Dabei gilt wegen $\tilde{u} \in V^{\mathcal{T}}$, dass auf jedem Dreieck T_k die Funktion $\tilde{u}$ eindeutig durch die drei Koeffizienten $\tilde{\mathbf{u}}_a$, $\tilde{\mathbf{u}}_b$, $\tilde{\mathbf{u}}_c \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch $\tilde{u}(x) = \tilde{\mathbf{u}}_a\Lambda_a(x) + \tilde{\mathbf{u}}_b\Lambda_b(x) + \tilde{\mathbf{u}}_c\Lambda_c(x)$. Bestimmen Sie wieder die *Elementsteifigkeitsmatrix*

$$B_{T_k} := \begin{pmatrix} b_{T_k}(\Lambda_a, \Lambda_a) & b_{T_k}(\Lambda_a, \Lambda_b) & b_{T_k}(\Lambda_a, \Lambda_c) \\ b_{T_k}(\Lambda_b, \Lambda_a) & b_{T_k}(\Lambda_b, \Lambda_b) & b_{T_k}(\Lambda_b, \Lambda_c) \\ b_{T_k}(\Lambda_c, \Lambda_a) & b_{T_k}(\Lambda_c, \Lambda_b) & b_{T_k}(\Lambda_c, \Lambda_c) \end{pmatrix}$$

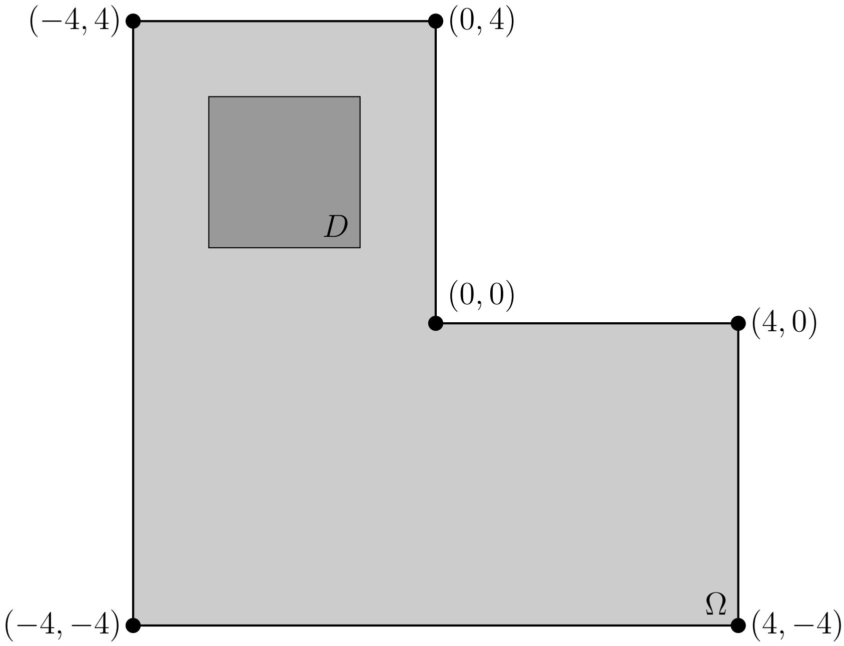
sowie $f_{T_k}(\Lambda_a)$, $f_{T_k}(\Lambda_b)$ und $f_{T_k}(\Lambda_c)$. Dabei dürfen Sie bei $f_{T_k}(\Lambda_a)$, $f_{T_k}(\Lambda_b)$ und $f_{T_k}(\Lambda_c)$ davon ausgehen, dass T_k entweder komplett im Teilgebiet D oder gar nicht in D enthalten ist.

Aufgabe 6.3 (Programmieraufgabe)
Wir betrachten das Gebiet

$$\Omega = ((-4,4) \times (-4,4)) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ oder } y < 0\}$$

mit dem Teilgebiet

$$D = [-3,-1] \times [1,3].$$



Wir betrachten die *parabolische* partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta u = \chi_D, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(x,0) = 0. \tag{1}$$

und wollen die *Rothe-Methode* (oder *horizontale Linienmethode*) verwenden, um eine Approximation an die wahre Lösung zu erhalten. Dabei wird (1) bezüglich der Zeit diskretisiert und es ist in jedem Zeitschritt ein elliptisches Randwertproblem zu lösen. Für eine feste Zeitschrittweite $\tau \in \mathbb{R}$ sei also $t_i := i\tau$, $i = 1, 2, \ldots$ und $u_i(x) \approx u(x, t_i)$ bezeichne die Approximation an die wahre Lösung zum Zeitpunkt t_i.

Wir verwenden das implizite Euler-Verfahren um $u_i(x)$ aus $u_{i-1}(x)$ zu bestimmen, d.h.

$$u_i(x) - \tau\Delta u_i(x) = u_{i-1}(x) + \tau\chi_D(x), \quad x \in \Omega, \quad u_i(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion, welche mit Hilfe der Rothe-Methode und den zweidimensionalen linearen finiten Elementen, welche auf dem 5. Übgungsblatt behandelt wurden, eine Approximation an die wahre Lösung von (1) bestimmt (verwenden Sie beispielsweise $\tau = \frac{1}{100}$ und berechnen Sie die Approximationen der ersten 1000 Zeitschritte). Visualisieren Sie ihr Ergebnis.

Hinweis: Falls Sie Ω mit dem `distmesh`-Paket triangulieren wollen, so können Sie das mit Hilfe der `dpoly`-Funktion realisieren (vgl. drittes Beispiel auf `http://persson.berkeley.edu/distmesh/`). Überlegen Sie sich, wie Sie mit Hilfe der `dpoly`-Funktion auch die Indizes der Randknoten bestimmen können.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 28.01.2022 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 28.01.2022 um 12:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in in Fach 17 eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**