Numerik partieller Differentialgleichungen
Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M.Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 01.11.2021)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Berechnen Sie die (distributionelle) Ableitung $u' \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ von

$$u(x) := \begin{cases} -x^2/2 - x/6 + 1/3 & \text{für } x \in (-1,0) \\ -x^2/4 - x/12 + 1/3 & \text{für } x \in (0,1) \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass u die Differentialgleichung

$$-(k(x)u'(x))' = f(x) \quad x \in (-1,1), \quad u(-1) = 0, u(1) = 0,$$

mit $f(x) := 1$ und

$$k(x) = 1 \quad \text{für } x \in (-1,0), \qquad k(x) = 2 \quad \text{für } x \in (0,1)$$

löst.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.17 (Rechenregeln für die Ableitung) der Vorlesung.

Aufgabe 2.3 (Schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.13 der Vorlesung:
Ist $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\partial_i f = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann ist f lokal konstant, d.h. die Distribution f wird durch einen Funktion erzeugt, bei der für jeden Punkt $x \in \Omega$ eine Umgebung existiert, auf der die Funktion konstant ist.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Vergewissern Sie sich, dass es genügt zu zeigen, dass f auf jedem (n-dimensionalen) Intervall $I =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\subset \Omega$ konstant ist.
- Zeigen Sie nun, dass

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(I) \text{ mit } \int_{a_i}^{b_i} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_i = 0 \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

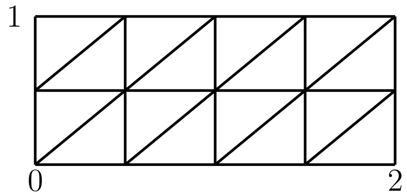
- Verwenden Sie nun Funktionen $\psi_j \in \mathcal{D}(]a_j, b_j[)$, $j = 1, \ldots, n$ mit $\int_{a_j}^{b_j} \psi_j(x_j)\,\mathrm{d}x_j = 1$ um die Behauptung zu zeigen.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[3+2 Punkte]
In dieser Aufgabe geht es um das Erstellen und die Visualisieren einer Triangulierung eines Gebietes.

(a) Betrachten Sie ein beliebiges Rechteck $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
[P,T] = gen_mesh(a,b,c,d,m,n)
```

welche zu einem Rechteck, gegeben durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sowie $m, n \in \mathbb{N}$ eine Triangulierung des Rechteckes in $2nm$ viele, gleichgroße Dreiecke erzeugt, vergleiche Abbildung 1 für ein Beispiel. Dabei soll die Ausgabe $P \in \mathbb{R}^{(n+1)(m+1),2}$ eine Matrix sein, welche in der i-ten Zeile die (x, y)-Koordinaten des i-ten Gitterpunktes enthält. $T \in \mathbb{R}^{2mn,3}$ soll eine Matrix sein, welche in der j-ten Zeile die Indizes der drei, zum j-ten Dreieck gehörenden, Gitterpunkte enthält. Testen Sie ihre Funktion für verschiedene Rechtecke.



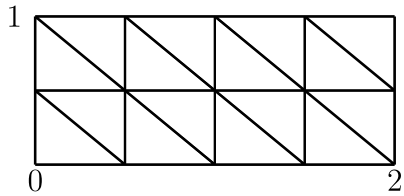


Abbildung 1: Beispielhafte Triangulierungen des Rechteckes $[0, 2] \times [0, 1]$ für $n = 4$ und $m = 2$.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
plot_mesh(P,T)
```

welche zu einer durch P und T gegebenen Triangulierung (vergleiche Teilaufgabe (a)) das zugehörige Gitter zeichnet. Testen Sie ihre Funktion mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a). Testen Sie ihre Funktion außerdem mit dem Gitter, welches in der Datei `grid.mat` (siehe Homepage) enthalten ist.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 12.11.2021 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 12.11.2021 um 12:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in in Fach 17 eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__