

1. Übungsblatt (erschienen am 04.11.2020)

Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)

Zu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und einer Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$\varphi_n := \varphi(x + h_n) \quad \text{und} \quad \psi_n := \frac{\varphi_n - \varphi}{h_n}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi_n \rightarrow \varphi$ und $\psi_n \rightarrow \varphi'$ (in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$).

Aufgabe 1.2 (Votieraufgabe)

Betrachten Sie die Funktionen $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \rho(x/\epsilon)$ definiert in Beispiel 2.2 der Vorlesung. Gibt es ein $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sodass die Folge $(\rho_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen φ konvergiert? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 1.3 (Schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Stetige lineare Funktionale $f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *Distributionen*. Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(\Omega)$. Für die Anwendung von f auf eine Testfunktion φ schreiben wir $f(\varphi)$ oder $\langle f, \varphi \rangle$.

Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: ein lineares Funktional $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig auf \mathcal{D} , falls es folgenstetig ist, also

$$\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \quad (\text{in } \mathbb{R}) \quad \text{für alle } (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \text{ mit } \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ (in } \mathcal{D}\text{)}.$$

Wir definieren die folgenden Funktionale $T_i : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 6$, durch:

$$\begin{aligned} T_1(\varphi) &:= \sum_{j=0}^k D^j \varphi(0) & T_2(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} D^j \varphi(0) \\ T_3(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j) & T_4(\varphi) &:= \max_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) \\ T_5(\varphi) &:= \int_0^1 \varphi(x) dx & T_6(\varphi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Welches dieser Funktionale definiert eine Distribution?

Aufgabe 1.4 (Programmieraufgabe)[3 Punkte]

Schreiben Sie ein Programm, das mittels finiter Differenzen die Lösung u von

$$-(k(x)u'(x))' = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 0 = u(1),$$

mit $f(x) := 1$ und

$$k(x) := 1 \quad \text{für } x \in (-1, 0), \quad k(x) := 2 \quad \text{für } x \in (0, 1)$$

approximiert.

Diskretisieren Sie dazu zu einem $N \in \mathbb{N}$ und dazugehöriger Schrittweite $h := \frac{2}{N}$ auf einem äquidistanten Gitter $x_i = -1 + ih$, $i = 0, \dots, N$ mit Zwischenpunkten $x_{i+1/2} = -1 + (i + 1/2)h$ die linke Seite der Gleichung

$$-(k(x)u'(x))' \quad \text{durch} \quad - \left[k(x_{i+1/2}) \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} - k(x_{i-1/2}) \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} \right]$$

und lösen Sie das resultierende lineare Gleichungssystem unter Beachtung der Randbedingungen $u(-1) = 0 = u(1)$.

Testen Sie ihr Programm für verschiedene N und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der schwachen Lösung aus Bemerkung 1.1 der Vorlesung.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 16.11.2020 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Numerik partieller Differentialgleichungen* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.