

3. Übungsblatt (erschienen am 12.05.2021)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)

Seien A, B und C (möglicherweise unbeschränkte) Operatoren. Beweisen Sie die Rechenregeln:

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= A + (B + C), \\ (AB)C &= A(BC), \\ (A + B)C &= AC + BC, \\ A(B + C) &\supseteq AB + AC\end{aligned}$$

und zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass im letzten Fall im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 3.2 (Votieraufgabe)

Berechnen Sie die Moore-Penrose-Inverse der Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3.3 (Votieraufgabe)

Betrachten Sie die *Shiftoperatoren* $W, S : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$,

$$W : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad S : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

Zeigen Sie, dass $W, S \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$ und berechnen Sie $\|W\|_{l^2(\mathbb{N})}$, $\|S\|_{l^2(\mathbb{N})}$ sowie die Moore-Penrose-Inversen W^+ und S^+ .

Aufgabe 3.4 (Schriftliche Aufgabe [6 Punkte])

Betrachten Sie die Abbildung $A : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, $Ax := y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = \frac{1}{n}x_n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- $A \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$, $\|A\|_{\mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))} = 1$
- $l^2(\mathbb{N}) = \overline{\mathcal{R}(A)} \supsetneq \mathcal{R}(A)$
- $\mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A)$ und $A^+y = x$, wobei $x_n = ny_n$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 24.05.2021 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Fortgeschrittene Optimierung und inverse Probleme* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.