

Skript zur Vorlesung

Wurzelsysteme

Wintersemester 2011/2012
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1	Was ist ein Wurzelsystem ?	1
2	Relationen zwischen zwei Wurzeln	11
3	Reduzierte Wurzelsysteme	18
4	Kammern und Basen	22
5	Coxetermatrizen und ihre Klassifikation	33
6	Klassifikation von Wurzelsystemen	47

1 Was ist ein Wurzelsystem ?

Ein Wurzelsystem ist eine endliche Menge von Vektoren in einem euklidischen Vektorraum, die einer Reihe von geometrischen Axiomen genügt. Wurzelsysteme spielen in der Theorie der Liegruppen und Liealgebren und in der Theorie der algebraischen Gruppen eine entscheidende Rolle. Sie haben auch Anwendungen in der Singularitätentheorie, in der diskreten Mathematik und vielen anderen Bereichen.

Ihren historischen Ursprung hat die Theorie der Wurzelsysteme in der Betrachtung von Symmetriegruppen, die bis in die Antike zurückgeht. Hierbei untersucht man bei Körpern in der Ebene und im Raum, unter welchen geometrischen Operationen (meist Spiegelungen oder Drehungen) diese invariant bleiben. Wie wir später sehen werden, sind Wurzelsysteme invariant unter einer endlichen Gruppe linearer Abbildungen, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) versehen ist (also ein Euklidischer Vektorraum).

Wir setzen $n = \dim(V)$. Eine Hyperebene in V ist ein linearer Unterraum H von V der Dimension $n - 1$.

Definition 1.1 Sei H eine Hyperebene in V . Wir definieren eine Spiegelung an H wie folgt: Es sei $a \in V \setminus \{0\}$ ein Vektor, der orthogonal zu H ist. Dann setzen wir

$$s_a(x) = x - 2 \frac{(x, a)}{(a, a)} a \text{ für alle } x \in V.$$

Wir nennen s_a die Spiegelung an H .

Lemma 1.2 i) Die Abbildung s_a hängt nicht von der Wahl von $a \in H^\perp$ ab.

ii) s_a ist ein orthogonaler Endomorphismus von V , d.h. s_a ist eine lineare Abbildung von V nach V , die das Skalarprodukt respektiert.

iii) Es ist $s_a(h) = h$ für alle $h \in H$ und $s_a(a) = -a$.

Beweis: i) Es sei H^\perp das orthogonale Komplement von H in V , das heißt

$$H^\perp = \{x \in V : (x, h) = 0 \text{ für alle } h \in H\}.$$

Wegen $H \oplus H^\perp = V$ ist $\dim H^\perp = 1$. Ist a' also ein anderer Vektor ungleich 0 in H^\perp , so ist $a' = \gamma a$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Damit können wir berechnen

$$x - 2 \frac{(x, a')}{(a', a')} a' = x - 2 \frac{(x, \gamma a)}{(\gamma a, \gamma a)} \gamma a = x - 2 \frac{(x, a)}{(a, a)} a.$$

ii) Wir rechnen zunächst nach, dass s_a linear ist. Für alle $\mu \in \mathbb{R}$ gilt $s_a(\mu x) = \mu x - 2\frac{(\mu x, a)}{(a, a)}a = \mu s_a(x)$. Für $x, y \in V$ gilt

$$s_a(x + y) = (x + y) - 2\frac{(x + y, a)}{(a, a)}a = x + y - 2\frac{(x, a)}{(a, a)}a - 2\frac{(y, a)}{(a, a)}a = s_a(x) + s_a(y).$$

Nun zeigen wir, dass s_a mit dem Skalarprodukt verträglich ist. Seien $x, y \in V$. Wir müssen zeigen $(s_a(x), s_a(y)) = (x, y)$. Dazu setzen wir die Definition ein:

$$\begin{aligned} & (s_a(x), s_a(y)) \\ &= \left(x - 2\frac{(x, a)}{(a, a)}a, y - 2\frac{(y, a)}{(a, a)}a\right) \\ &= (x, y) - \left(x, 2\frac{(y, a)}{(a, a)}a\right) - \left(2\frac{(x, a)}{(a, a)}a, y\right) + \left(2\frac{(x, a)}{(a, a)}a, 2\frac{(y, a)}{(a, a)}a\right) \\ &= (x, y) - 2\frac{(y, a)}{(a, a)}(x, a) - 2\frac{(x, a)}{(a, a)}(a, y) + 4\frac{(x, a)}{(a, a)}\frac{(y, a)}{(a, a)}(a, a) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

iii) Für jedes $h \in H$ ist $s_a(h) = h$, da $(h, a) = 0$ ist. Ferner gilt $s_a(a) = a - 2\frac{(a, a)}{(a, a)}a = a - 2a = -a$. \square

Wir betrachten als Beispiel zunächst den (trivialen) Fall $\dim V = 1$, also $V \simeq \mathbb{R}$, versehen mit dem Standard-Skalarprodukt. Die einzige Hyperebene ist hier $H = \{0\}$. Sei $a \neq 0$ ein Vektor in V . Dann ist jedes $x \in V$ ein Vielfaches $x = \mu a$ von a , also gilt $s_a(x) = s_a(\mu a) = \mu s_a(a) = -\mu a = -x$ nach Lemma 1.2. Somit ist hier also s_a einfach die Punktspiegelung am Nullpunkt.

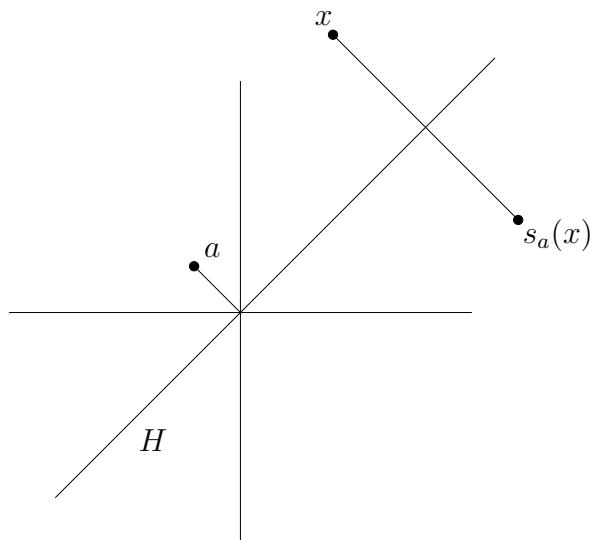
Nun nehmen wir an, dass $\dim V = 2$, es gibt also eine Isometrie $V \simeq \mathbb{R}^2$, wobei \mathbb{R}^2 mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen ist. Jede Gerade H in V ist dann eine Hyperebene. Die Wirkung der zugehörigen Spiegelung s_a auf x lässt sich dann so beschreiben: Wir fällen von x aus ein Lot auf H und tragen auf der anderen Seite von H noch einmal den Abstand von x zu H ab. Mit Hilfe der Zerlegung $V = H \oplus \langle a \rangle$ können wir nämlich x schreiben als $x = h + \mu a$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$, woraus $s_a(x) = s_a(h) + \mu s_a(a) = h - \mu a$ folgt.

Definition 1.3 *Ein Wurzelsystem in dem euklidischen Vektorraum V ist eine endliche Teilmenge Φ von V , die folgende Bedingungen erfüllt:*

- i) Φ enthält nicht den Nullvektor und ist ein Erzeugendensystem von V .
- ii) Für jedes $a \in \Phi$ lässt die Spiegelung

$$s_a(x) = x - 2\frac{(x, a)}{(a, a)}a$$

die Menge Φ invariant, das heißt für jedes $b \in \Phi$ ist auch $s_a(b) \in \Phi$.



iii) Für je zwei Elemente a, b in Φ ist $2 \frac{(b,a)}{(a,a)} \in \mathbb{Z}$.

Gilt zusätzlich

iv) $\langle a \rangle \cap \Phi = \{a, -a\}$,

so nennen wir das Wurzelsystem Φ reduziert.

Die Elemente eines Wurzelsystems nennen wir auch Wurzeln. Die Dimension des Vektorraums V heißt auch der Rang des Wurzelsystems. Nach Lemma 1.2 iii) ist für jede Wurzel a auch $-a$ eine Wurzel.

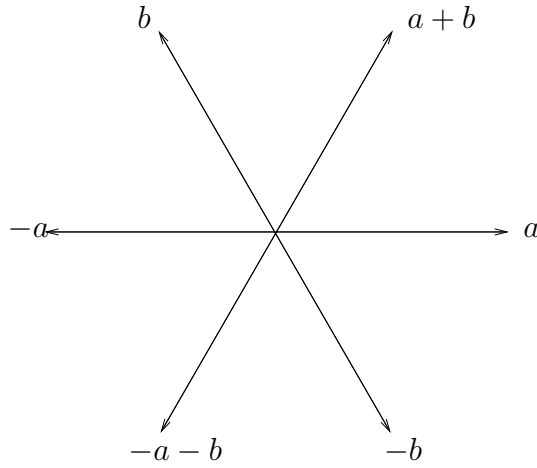
Ist V eindimensional, so ist für jedes $a \in V$ die Menge $\Phi = \{a, -a\}$ ein Wurzelsystem. Dieses heißt vom Typ A_1 . Weitere reduzierte Wurzelsysteme vom Rang 1 gibt es nicht.

Nun betrachten wir den Fall $\dim V = 2$, das heißt, es gibt eine Isometrie zwischen dem euklidischen Vektorraum V und der Ebene \mathbb{R}^2 mit dem kanonischen Skalarprodukt. Das erste Beispiel, das uns einfällt, ist das folgende: Seien a und b zwei orthogonale Vektoren in V . Dann ist $\Phi = \{a, -a, b, -b\}$ ein Wurzelsystem in V . Dieses Wurzelsystem ist das (orthogonale) Produkt des Wurzelsystems vom Typ A_1 mit sich selbst. Daher nennt man es vom Typ $A_1 \times A_1$. Wir werden später noch sehen, dass man allgemein immer durch orthogonale Produktbildung Wurzelsysteme konstruieren kann.

Interessanter ist das folgende Wurzelsystem: Wir betrachten zwei Vektoren a, b in der Ebene, die dieselbe Länge haben und einen Winkel von $2\pi/3$ bilden.

Dann ist $\Phi = \{a, b, a + b, -a, -b, -a - b\}$ ein Wurzelsystem in V .

Es heißt vom Typ A_2 . Um nachzuprüfen, dass Φ ein Wurzelsystem ist, brauchen wir folgende grundlegende Tatsache aus der Linearen Algebra:



Lemma 1.4 Für Vektoren x, y im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^2 sei $\angle(x, y) < \pi$ der von x und y aufgespannte Winkel. Dann gilt

$$(x, y) = \|x\| \|y\| \cos \angle(x, y),$$

wobei $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ die Norm von x bezeichnet.

Proposition 1.5 Die oben definierte Teilmenge $\Phi = \{a, b, a + b, -a, -b, -a - b\}$ ist ein Wurzelsystem in V .

Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass Φ ein Erzeugendensystem von V ist, das nicht die Null enthält. Aus $\angle(a, b) = 2\pi/3$ folgt $(b, a) = (a, b) = \|a\| \|b\| (-1/2) = (-1/2)(a, a)$, da $\|a\| = \|b\|$ ist. Ferner ist $(a + b, a) = (a, a) + (b, a) = \frac{1}{2}(a, a)$. Somit gilt

$$s_a(b) = b - 2 \frac{(b, a)}{(a, a)} a = b + a, s_a(a + b) = a + b - 2 \frac{(a + b, a)}{(a, a)} a = a + b - a = b.$$

Da $s_a(-b) = -s_b(b)$ und $s_a(-a - b) = -s_a(a + b)$ ist, können wir schließen, dass s_a die Menge Φ invariant lässt. Genauso zeigt man, dass s_b die Menge Φ invariant lässt. Wir berechnen jetzt noch $(a + b, a + b) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b) = (a, a)$ und

$$\begin{aligned} s_{a+b}(a) &= a - 2 \frac{(a, a + b)}{(a + b, a + b)} (a + b) = a - (a + b) = -b \text{ und} \\ s_{a+b}(b) &= b - 2 \frac{(b, a + b)}{(a + b, a + b)} (a + b) = -b. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass auch s_{a+b} die Menge Φ invariant lässt. Genauso argumentiert man für die Spiegelungen s_{-a} , s_{-b} und s_{-a-b} .

Aus den obigen Rechnungen ergibt sich auch sofort die dritte Bedingung in 1.3. \square

Wir werden jetzt noch drei weitere Beispiele von Wurzelsystemen vom Rang 2 kennenlernen.

Proposition 1.6 *Es seien a und b zwei Vektoren derselben Länge im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$, versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt.*

i) *Dann ist*

$$\Phi = \{a, b, -a, -b, a + b, -a - b, a - b, b - a\}$$

ein Wurzelsystem in V . Es heißt vom Typ B_2 .

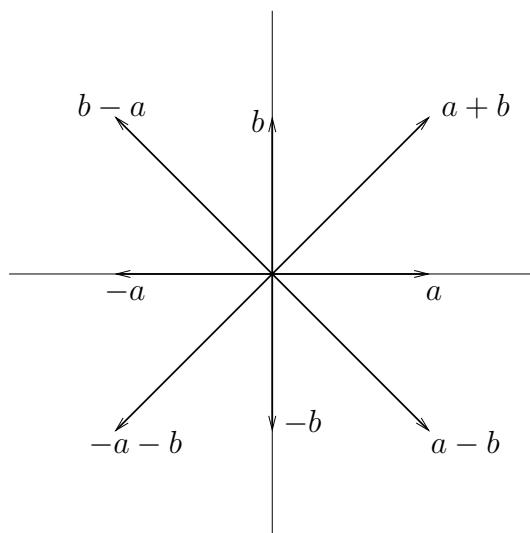
ii) *Auch*

$$\Phi = \{2a, 2b, -2a, -2b, a + b, -a - b, a - b, b - a\}$$

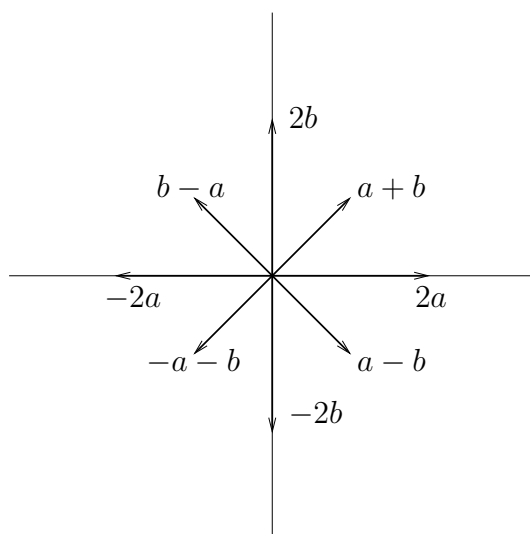
ist ein Wurzelsystem in V . Es heißt vom Typ C_2 .

Beweis: In den Übungen.

Das Wurzelsystem vom Typ B_2 sieht also folgendermaßen aus:



Das Wurzelsystem vom Typ C_2 sieht so aus:



Definition 1.7 Zwei Wurzelsysteme $\Phi_1 \subset V_1$ und $\Phi_2 \subset V_2$ in den euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2 heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus

$$f : V_1 \rightarrow V_2$$

von \mathbb{R} -Vektorräumen und eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass gilt

$$i) f(\Phi_1) = \Phi_2$$

$$ii) (f(v), f(w))_{V_2} = C(v, w)_{V_1} \text{ für alle } v, w \in V_1, \text{ wobei } (\cdot, \cdot)_{V_1} \text{ und } (\cdot, \cdot)_{V_2} \text{ die Skalarprodukte auf } V_1 \text{ bzw. } V_2 \text{ bezeichnen.}$$

Für jedes Wurzelsystem Φ und jedes $c > 0$ ist also $C\Phi = \{ca : a \in \Phi\}$ ein zu Φ isomorphes Wurzelsystem.

Lemma 1.8 Das Wurzelsystem vom Typ B_2 ist isomorph zum Wurzelsystem C_2 .

Die Bilder der beiden Wurzelsysteme legen nahe, dass man eine Drehung um 45° und eine Stauchung vornehmen sollte. Algebraisch gesprochen, definieren wir eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch die Bilder $f(a) = a + b$ und $f(b) = b - a$ auf der Orthogonalbasis $\{a, b\}$ von \mathbb{R}^2 . Dann ist $(a + b, a + b) = 2(a, a)$ und $(b - a, b - a) = 2(a, a) = 2(b, b)$. Daraus folgt

$$(fv, fw) = 2(v, w)$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Man rechnet außerdem leicht nach, dass f das Wurzelsystem vom Typ B_2 bijektiv auf das Wurzelsystem vom Typ C_2 abbildet.

Wir wollen noch ein weiteres Beispiel vom Rang 2 kennenlernen, das weniger offensichtlich ist.

Proposition 1.9 Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der zweidimensionale Unterraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

versehen mit der Einschränkung des kanonischen Skalarprodukts. Mit e_1, e_2, e_3 bezeichnen wir die kanonischen Einheitsvektoren im \mathbb{R}^3 . Dann ist

$$\Phi = \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_3, e_2 - e_1, e_3 - e_1, e_3 - e_2, 2e_1 - e_2 - e_3, 2e_2 - e_1 - e_3, 2e_3 - e_1 - e_2, -2e_1 + e_2 + e_3, -2e_2 + e_1 + e_3, -2e_3 + e_1 + e_2\}$$

ein Wurzelsystem in V .

Es heißt vom Typ G_2 .

Beweis : Es sei a eine der Wurzeln $e_i - e_j$ für $i \neq j$. Da $(a, a) = 2$ ist, ist $2\frac{(a,b)}{(a,a)} \in \mathbb{Z}$ für alle $b \in \Phi$.

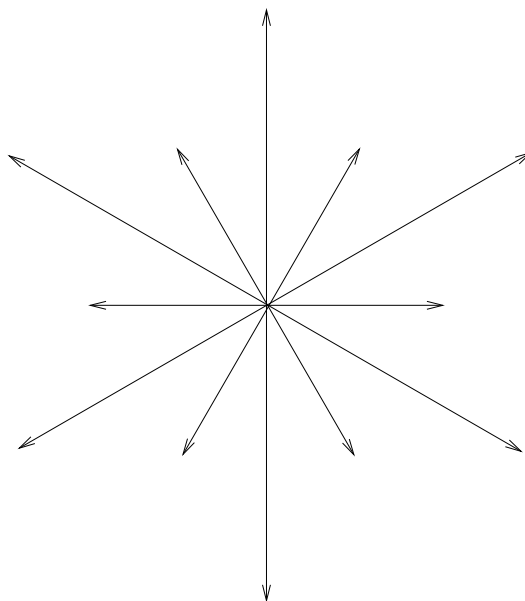
Nun sei b eine der Wurzeln $\pm(2e_i - e_j - e_k)$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Dann ist $(b, b) = 6$. Nun rechnen wir nach, dass für jede Wurzel a der Form $a = e_i - e_j$ ($i \neq j$) gilt $(b, a) \in \{-3, 0, 3\}$, und dass für jede Wurzel $a \notin \{\pm b\}$ der Form $\pm(2e_i - e_j - e_k)$ gilt $(b, a) \in \{-3, 3\}$. Also folgt auch hier

$$2\frac{(b, a)}{(b, b)} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } a \in \Phi.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass Φ invariant unter den Spiegelungen s_a für $a \in \Phi$ ist. Die Spiegelungen an $a = e_i - e_j$ ($i \neq j$) vertauschen einfach e_i und e_j , daher ist Φ invariant unter ihnen. Die Spiegelung s_a an $a = 2e_i - e_j - e_k$ bildet, wie wir oben gesehen haben, eine Wurzel b entweder auf sich selbst ab oder auf die Summe $a + b$. Man kann leicht nachprüfen, dass diese Elemente alle in Φ liegen. \square

Das Wurzelsystem vom Typ G_2 sieht etwa folgendermaßen aus:



Definition 1.10 Sei Φ ein Wurzelsystem in V . Die Untergruppe der orthogonalen Endomorphismen von V , die von den Spiegelungen s_a für alle $a \in \Phi$ erzeugt wird, heißt Weylgruppe von Φ . Wir bezeichnen sie mit $W(\Phi)$.

Beispiel: Die Weylgruppe des Wurzelsystems Φ vom Typ A_2 wird erzeugt von den Spiegelungen s_a und s_b , wobei a und b zwei Vektoren gleicher Länge im \mathbb{R}^2 sind, die einen Winkel von $\frac{2\pi}{3}$ bilden. Es gilt $s_a^2 = 1, s_b^2 = 1$, wobei wir $1 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ schreiben. Was ist $s_a \circ s_b$? Aus der Theorie der euklidischen Bewegungen ist (vielleicht) bekannt, dass das Produkt von zwei Spiegelungen eine Drehung ist. Wir können dies aber auch direkt einsehen. Wir betrachten die lineare Abbildung $s_a \circ s_b$ auf den Basisvektoren a und b .

Es gilt

$$\begin{aligned} s_a \circ s_b(a) = s_a(a+b) &= -a + s_a(b) \\ &= -a + b + a \\ &= b \end{aligned}$$

und

$$s_a \circ s_b(b) = s_a(-b) = -s_a(b) = -a - b.$$

Also ist $s_a \circ s_b$ die (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung, die a auf b und b auf $-a - b$ abbildet, und somit eine Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ gegen der Uhrzeigersinn. Daraus folgt

$$(s_a \circ s_b)^3 = s_a \circ s_b \circ s_a \circ s_b \circ s_a \circ s_b = 1$$

Außerdem ist $(s_a \circ s_b)^2$ eine Drehung um den Winkel $\frac{4\pi}{3}$ gegen den Uhrzeigersinn (und somit gleich $s_b \circ s_a$).

Ferner ist $s_b \circ s_a \circ s_b$ die Spiegelung an $a + b$, denn diese lineare Abbildung bildet a auf $-b$ und b auf $-a$ ab und ist dadurch eindeutig bestimmt. Da Spiegelungen die Ordnung 2 haben, erhalten wir insgesamt

$$W(\Phi) = \{a, s_a, s_b, s_a \circ s_b, (s_a \circ s_b)^2, s_b \circ s_a \circ s_b\}$$

Die Weylgruppe ist also eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6. Sie wird erzeugt von s_a und s_b . Vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned} W(\Phi) &\rightarrow \mathcal{S}_3 \\ s_a &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ s_b &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kann man leicht nachrechnen, dass $W(\Phi) \simeq \mathcal{S}_3$ gilt. Hier bezeichnen wir mit \mathcal{S}_n die Gruppe der Permutationen von n Elementen.

Nun wollen wir zu einem Wurzelsystem $\Phi \subset V$ ein duales Wurzelsystem konstruieren.

Dazu betrachten wir den Dualraum $V^* = \text{Hom}_{K\text{-linear}}(V, K)$. Da V ein euklidischer Vektorraum ist, verfügen wir über den kanonischen Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow V^* \\ x &\longmapsto (x, -) =: f_x. \end{aligned}$$

Wir statten V^* mit dem Skalarprodukt $(f_x, f_y) := (x, y)$ aus. Somit wird V^* zu einem euklidischen Vektorraum.

Wir definieren nun für jede Wurzel $a \in \Phi$ eine „duale“ Wurzel $a^\vee \in V^*$ durch

$$a^\vee = \frac{2}{(a, a)} f_a$$

und setzen $\Phi^\vee = \{a^\vee : a \in \Phi\} \subset V^*$.

Satz 1.11 Φ^\vee ist ein Wurzelsystem in V^* . Wir nennen es das inverse Wurzelsystem zu Φ .

Beweis : Offenbar ist $0 \notin \Phi^\vee$ und Φ^\vee erzeugt den Vektorraum V^* . Wir betrachten zunächst die Werte

$$2 \frac{(b^\vee, a^\vee)}{(a^\vee, a^\vee)}$$

für $a, b \in \Phi$. Diese können wir einfach ausrechnen:

$$\begin{aligned} 2 \frac{(b^\vee, a^\vee)}{(a^\vee, a^\vee)} &= 2 \frac{2}{(b, b)} \frac{2}{(a, a)} \frac{(a, a)}{2} \frac{(a, a)}{2} \frac{(b, a)}{(a, a)} \\ &= 2 \frac{(b, a)}{(b, b)} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Damit ist Bedingung iii) in Definition 1.3 erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass Φ^\vee invariant unter allen Spiegelungen $s_a^\vee (a \in \Phi)$ ist. Dazu zeigen wir für alle $a, b \in \Phi$, dass

$$s_{a^\vee}(b^\vee) = (s_a(b))^\vee$$

gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} s_{a^\vee}(b^\vee) &= b^\vee - 2 \frac{(b^\vee, a^\vee)}{(a^\vee, a^\vee)} a^\vee \\ &= \frac{2}{(b, b)} f_b - 2 \frac{(b, a)}{(b, b)} \frac{2}{(a, a)} f_a \\ &= \frac{2}{(b, b)} (f_b - 2 \frac{(b, a)}{(a, a)} f_a) \\ &= \frac{2}{(b, b)} f_{s_a(b)} \quad (\text{denn } x \mapsto f_x \text{ ist linear}) \\ &= \frac{2}{((s_a(b), s_a(b)))} f_{s_a(b)} = (s_a(b))^\vee, \end{aligned}$$

denn $(b, b) = (s_a(b), s_a(b))$, da Spiegelungen nach Lemma 1.2 ii) orthogonal sind. Damit ist auch Bedingung ii) aus Definition 1.3 erfüllt. \square

Lemma 1.12 Für jedes Wurzelsystem Φ ist $(\Phi^\vee)^\vee = \Phi$ unter der Identifikation $(V^*)^* = V$.

Beweis : Für jedes $a \in \Phi$ ist $(a^\vee)^\vee = \frac{2}{(a^\vee, a^\vee)} g_{a^\vee}$, wobei $g : V^* \rightarrow (V^*)^*$ die Abbildung

$$y \mapsto (y, -)$$

ist.

Die Identifikation $V = (V^*)^*$ geschieht auf kanonische Weise durch $x \mapsto (f(x))$. Also wird unter

$$V^* \xrightarrow{g} (V^*)^* = V$$

das Element $y = f_x$ gerade abgebildet auf x . Somit können wir berechnen

$$g_{a^\vee} = \frac{2}{(a, a)} g_{f_a} = \frac{2}{(a, a)} a, \quad \text{woraus mit } \frac{2}{(a^\vee, a^\vee)} = \left(\frac{2}{(a, a)} \right)^{-2} \frac{2}{(a, a)} = \left(\frac{2}{(a, a)} \right)^{-1}$$

in der Tat

$$\begin{aligned} (a^\vee)^\vee &= \frac{2}{(a^\vee, a^\vee)} g_{a^\vee} \\ &= \left(\frac{2}{(a, a)} \right)^{-1} g_{a^\vee} \\ &= a \end{aligned}$$

folgt. \square

Beispiel: Wir berechnen das inverse Wurzelsystem zu $\Phi = \{\pm a, \pm b, \pm(a+b), \pm(a-b)\}$ vom Typ B_2 . Unter der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ werden die kanonischen Einheitsvektoren auf eine Orthonormalbasis geschickt. Identifizieren wir $(\mathbb{R}^2)^*$ mit \mathbb{R}^2 mit Hilfe dieser Orthonormalbasis, so wird f zur Identität. Wir berechnen dann

$$\Phi^\vee = \left\{ \pm \frac{2}{(a, a)} a, \pm \frac{2}{(b, b)} b, \pm \frac{2}{(a+b, a+b)} (a+b), \pm \frac{2}{(a-b, a-b)} (a-b) \right\}$$

Da $(b, b) = (a, a)$ und $(a+b, a+b) = (a-b, a-b) = 2(a, a)$ gilt, folgt mit $C = \frac{1}{(a, a)}$:

$$\Phi^\vee = \{\pm C2a, \pm C2b, \pm C(a+b), \pm C(a-b)\} = C\{\pm 2a, \pm 2b, \pm(a+b), \pm(a-b)\}.$$

Somit ist das zu Φ inverse Wurzelsystem vom Typ C_2 .

Lemma 1.13 *Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume und $\Phi_1 \subset V_1$ und $\Phi_2 \subset V_2$ Wurzelsysteme. Wir setzen $V = V_1 \oplus V_2$ und identifizieren V_1 mit $V_1 \oplus \{0\} \subset V$ und V_2 mit $\{0\} \oplus V_2 \subset V$. Dann ist $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ ein Wurzelsystem in V . Wir nennen Φ das orthogonale Produkt von Φ_1 und Φ_2 .*

Beweis : in den Übungen □

Definition 1.14 *Ein Wurzelsystem $\Phi \subset V$ heißt irreduzibel, falls sich Φ nicht als orthogonales Produkt von zwei Wurzelsystemen von echt kleinerem Rang schreiben lässt.*

Proposition 1.15 *Sei $\Phi \subset V$ ein Wurzelsystem. Dann ist Φ die orthogonale Summe von endlich vielen irreduziblen Wurzelsystemen*

$$\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_r.$$

Die Faktoren Φ_i sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Beweis : Wir zeigen die Behauptung mit Induktion nach der Kardinalität $|\Phi|$ von Φ . Für $|\Phi| = 2$ ist Φ irreduzibel. Für $|\Phi| > 2$ nehmen wir an, dass die Behauptung für alle Wurzelsysteme kleinerer Kardinalität gilt.

Ist Φ irreduzibel, so gilt die Behauptung. Falls nicht, so lässt sich Φ als orthogonale Summe zweier Wurzelsysteme $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ echt kleinerer Kardinalität schreiben. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf Φ_1 und Φ_2 an, so folgt die Existenz einer Zerlegung von Φ in endliche viele irreduzible Wurzelsysteme. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass für jede Zerlegung $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$ in orthogonale Faktoren, so dass Φ' irreduzibel ist, das Wurzelsystem Φ' entweder in Φ_1 oder in Φ_2 enthalten ist. Wir betrachten $\Phi' \cap \Phi_1$ und $\Phi' \cap \Phi_2$. Da V_1 und V_2 orthogonal sind, sind auch die Vektorräume $\langle \Phi' \cap \Phi_1 \rangle$ und $\langle \Phi' \cap \Phi_2 \rangle$ orthogonal. Also ist Φ' das orthogonale Produkt von $\Phi' \cap \Phi_1$ und $\Phi' \cap \Phi_2$.

Da Φ' irreduzibel ist, muss $\Phi' = \Phi' \cap \Phi_1$ oder $\Phi' = \Phi' \cap \Phi_2$ gelten. Also ist Φ' in der Tat in Φ_1 oder in Φ_2 enthalten. □

2 Relationen zwischen zwei Wurzeln

Wir wollen nun (für eine spätere Klassifikation der Wurzelsysteme) Eigenschaften von Wurzelsystemen studieren. Dazu sei $\Phi \subset V$ ein Wurzelsystem und V wie immer ein euklidischer Vektorraum.

Definition 2.1 Für $a, b \in \Phi$ setzen wir

$$n(a, b) = 2 \frac{(a, b)}{(b, b)}.$$

Nach Definition eines Wurzelsystems sind alle $n(a, b)$ ganze Zahlen. Ferner ist $n(a, a) = 2$ und $n(a, -a) = -2$.

Offenbar gilt

$$n(a, b) = 0 \Leftrightarrow (a, b) = 0 \Leftrightarrow n(b, a) = 0 \Leftrightarrow s_a(b) = b \Leftrightarrow s_b(a) = a.$$

Falls $(a, b) \neq 0$ ist, so gilt

$$\frac{n(a, b)}{n(b, a)} = 2 \frac{(a, b)}{(b, b)} \frac{1}{2} \frac{(a, a)}{(b, a)} = \frac{(a, a)}{(b, b)}.$$

Außerdem ist für beliebige $a, b \in \Phi$

$$\begin{aligned} n(a, b)n(b, a) &= 2 \frac{(a, b)}{(b, b)} 2 \frac{(b, a)}{(a, a)} \\ &= 4 \frac{(a, b)^2}{(b, b)(a, a)} \\ &= 4 \cos^2 \angle(a, b) \end{aligned}$$

nach Lemma 1.4 (angewandt auf eine beliebige Ebene in \mathbb{R}^2 , die a und b enthält).

Lemma 2.2 Für alle $a, b \in \Phi$ ist $n(a, b)n(b, a) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Beweis : Wie wir oben gesehen haben, ist $n(a, b)n(b, a) = 4 \cos^2 \angle(a, b) \leq 4$.

Da gilt

$$n(a, b) < 0 \Leftrightarrow (a, b) < 0 \Leftrightarrow n(b, a) < 0$$

folgt, dass $n(a, b)n(b, a)$ immer ≥ 0 ist. Also ist $n(a, b)n(b, a)$ eine ganze Zahl zwischen 0 und 4. \square

Im folgenden Satz bestimmen wir alle Möglichkeiten für $n(a, b)$ und den Winkel $\angle(a, b)$ sowie die Ordnung $\text{ord}(s_a s_b)$ der Verknüpfung der beiden Spiegelungen zu a und b in der Weylgruppe Φ .

Satz 2.3 Für zwei beliebige Wurzeln a, b mit $\|a\| \leq \|b\|$ gibt es genau die folgenden 11 Möglichkeiten für $n(a, b)$ und $n(b, a)$:

Nr.	$n(a, b)$	$n(b, a)$	$\angle(a, b)$	$\text{ord}(s_a s_b)$	Bem.
1	0	0	$\frac{\pi}{2}$	2	
2	1	1	$\frac{\pi}{3}$	3	$\ a\ = \ b\ $
3	-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	3	$\ a\ = \ b\ $
4	1	2	$\frac{\pi}{4}$	4	$\ b\ = \sqrt{2} \ a\ $
5	-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	4	$\ b\ = \sqrt{2} \ a\ $
6	1	3	$\frac{\pi}{6}$	6	$\ b\ = \sqrt{3} \ a\ $
7	-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	6	$\ b\ = \sqrt{3} \ a\ $
8	2	2	0	1	$a = b$
9	-2	-2	π	1	$a = -b$
10	1	4	0	1	$b = 2a$
11	-1	-4	π	1	$b = -2a$

Beweis : Nach Lemma 2.2 ist $n(a, b)n(b, a) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Wir gehen die einzelnen Möglichkeiten durch.

- i) $n(a, b)n(b, a) = 0, \Rightarrow n(a, b) = n(b, a) = 0$, also $(a, b) = 0$. Somit ist $\angle(a, b) = \frac{\pi}{2}$.
Ferner ist $s_a s_b$ diejenige lineare Abbildung, die a auf $-a$ und b auf $-b$ abbildet. Sie hat offenbar die Ordnung 2.
- ii) $n(a, b)n(b, a) = 1$. Dann ist entweder $n(a, b) = n(b, a) = 1$ oder $n(a, b) = n(b, a) = -1$, da $n(a, b)$ und $n(b, a)$ immer dasselbe Vorzeichen haben. Aus $n(a, b) = n(b, a)$ folgt wegen $(a, b) = (b, a)$ die Gleichung

$$(a, a) = (b, b),$$

also $\|a\| = \|b\|$.

Im ersten Fall ist

$$\cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} = \frac{(a, b)}{(a, a)} = \frac{1}{2} n(b, a) = \frac{1}{2},$$

woraus $\angle(a, b) = \frac{\pi}{3}$ folgt.

Im zweiten Fall ist

$$\cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{(a, a)} = \frac{1}{2} n(b, a) = -\frac{1}{2},$$

woraus $\angle(a, b) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ folgt.

$$\begin{aligned} \text{Im ersten Fall ist } s_a(b) &= b - 2 \frac{(b, a)}{(a, a)} a = b - n(b, a) a \\ &= b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } s_b(a) &= a - 2 \frac{(a, b)}{(b, b)} b = a - n(a, b) b \\ &= a - b, \end{aligned}$$

so dass $s_a s_b(b) = s_a(-b) = -s_a(b) = a - b$ und $s_a s_b(a) = s_a(a - b) = -a - s_a(b) = -a - (b - a) = -b$ gilt. Auf dem $(\dim V - 2)$ -dimensionalen Unterraum $\langle a \rangle^\perp \cap \langle b \rangle^\perp$ ist $s_a s_b$ die Identität. Aus $(s_a s_b)(s_a s_b)(b) = s_a s_b(a - b) = s_a(a - b + b) = -a$ und $(s_a s_b)(s_a s_b)(a) = s_a s_b(-b) = s_a(b) = b - a$ folgt $\text{ord}(s_a s_b) = 3$, da $(s_a s_b)^2 \neq \text{id}$, aber $(s_a s_b)^3 = \text{id}$ ist.

Genauso zeigt man $\text{ord}(s_a s_b) = 3$ im zweiten Fall.

- iii) $n(a, b)n(b, a) = 2$. Dann sind diese beiden Zahlen entweder 1 und 2 oder (-1) und (-2) .

Da wir $\|a\| \leq \|b\|$ angenommen haben, gilt

$$|n(a, b)| = 2 \frac{|(a, b)|}{(b, b)} \leq 2 \frac{|(a, b)|}{(a, a)} = |n(b, a)|.$$

Somit können nur die beiden Fälle $n(a, b) = 1, n(b, a) = 2$ und $n(a, b) = -1, n(b, a) = -2$ vorliegen.

Aus $|n(b, a)| = 2|n(a, b)|$ folgt

$$2 \left(2 \frac{|(a, b)|}{(b, b)} \right) = 2 \frac{|(b, a)|}{(a, a)}, \text{ also } 2(a, a) = (b, b),$$

woraus $\sqrt{2} \|a\| = \|b\|$ folgt.

Im ersten Fall ist

$$\cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} = \frac{(a, b)}{\sqrt{2}(a, a)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} n(b, a) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

woraus $\angle(a, b) = \frac{\pi}{4}$ folgt. Analog argumentiert man im zweiten Fall. Die Ordnung von $s_a s_b$ kann man wieder durch Auswerten auf a und b bestimmen.

- iv) $n(a, b)n(b, a) = 3$. Dann ist entweder $n(a, b) = 1$ und $n(b, a) = 3$ oder $n(a, b) = -1$ und $n(b, a) = -3$, denn wie in iii) zeigt man $|n(a, b)| \leq |n(b, a)|$.

Aus $|n(a, b)| = \frac{1}{3}|n(b, a)|$ folgt

$$2 \frac{|(a, b)|}{(b, b)} = \frac{2}{3} \frac{|(b, a)|}{(a, a)}, \text{ also}$$

$$\|b\| = \sqrt{3} \|a\|.$$

Im ersten Fall ist

$$\begin{aligned} \cos \angle(a, b) &= \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} = \frac{(a, b)}{\sqrt{3}(a, a)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} n(b, a) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

woraus $\angle(a, b) = \frac{\pi}{6}$ folgt.

Der zweite Teil ergibt sich analog.

Die Ordnung von $s_a s_b$ kann man wieder durch Auswerten auf a und b berechnen.

- v) $n(a, b)n(b, a) = 4$, Unter Berücksichtigung der Tatsache $|n(a, b)| \leq |n(b, a)|$ bleiben hier die Fälle $(2, 2), (-2, -2), (1, 4)$ und $(-1, -4)$ zu betrachten. Im ersten Fall folgt $(a, a) = (a, b) = (b, b)$. Der Vektor $a - b$ liegt also im von a und b erzeugten Unterraum und erfüllt $(a, a - b) = 0$ und $(b, a - b) = 0$. Daher muss $a - b = 0$ sein, also $a = b$ gelten.

Im zweiten Fall gilt $(a, -b) = (a, a) = (b, b)$, woraus mit einem analogen Argument $a = -b$ folgt.

Im dritten und vierten Fall ist $4|n(a, b)| = |n(b, a)|$, also $\|b\| = 2\|a\|$. Ferner gilt im dritten Fall

$$n(a, b) = 1, \Rightarrow 2 \frac{(a, b)}{(b, b)} = 1, \Rightarrow (2a, b) = (2a, b) = (b, b)$$

und

$$n(b, a) = 4 \Rightarrow 2 \frac{(b, a)}{(a, a)} = 4, \Rightarrow (b, 2a) = 2(b, a) = 4(a, a) = (2a, 2a).$$

Also ist $b - 2a$ orthogonal zu a und b , woraus $b = 2a$ folgt.

Dasselbe Argument auf $b + 2a$ angewandt zeigt im vierten Fall $b = -2a$.

□

Korollar 2.4 *i) Wenn die Wurzeln a und b proportional sind, dann ist der Proportionalitätsfaktor*

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2} \text{ oder } \pm 2.$$

ii) Wenn die Wurzeln a und b nicht proportional sind und wenn $\|a\| \leq \|b\|$ gilt, so ist

$$n(a, b) \in \{0, -1, 1\}.$$

Beweis :

- i) Nach Satz 2.3 sind die Wurzeln a und b nur in den Fällen 8 bis 11 proportional. Daraus folgt die Behauptung.
- ii) Nach Satz 2.3 sind a und b nur in den Fällen 1 bis 7 nicht proportional. In diesen Fällen ist für $\|a\| \leq \|b\|$ die Zahl $n(a, b)$ immer 0 oder ± 1 .

□

Wir nennen eine Wurzel a **indivisibel**, falls $\frac{1}{2}a \notin \Phi$ ist.

Satz 2.5 *Seien $a, b \in \Phi$.*

- i) Falls $(a, b) > 0$ und $a \neq b$ ist, so ist $a - b \in \Phi$.*
- ii) Falls $(a, b) < 0$ und $a \neq -b$ ist, so ist $a + b \in \Phi$.*
- iii) Falls $a - b \notin \Phi \cup \{0\}$ und $a + b \notin \Phi \cup \{0\}$, so folgt $(a, b) = 0$.*

Beweis :

- i) Wir erinnern daran, dass gilt: $(a, b) > 0$ genau dann, wenn $n(a, b) > 0$. Nach Satz 2.3 tritt dieser Fall nur in der Situation 2), 4), 6) und 10) auf, wenn $a \neq b$ ist. In allen vier Situationen ist $n(a, b) = 1$, also folgt $a - b = a - n(a, b)b = s_b(a) \in \Phi$.
- ii) und iii) lassen sich analog beweisen (in den Übungen).

□

Proposition 2.6 *Es seien a und b zwei nicht-proportionale Wurzeln.*

- i) Die Menge $J = \{j \in \mathbb{Z} : b + ja \in \Phi\}$ ist ein Intervall der Form

$$[-q, p] \cap \mathbb{Z}$$

für ganze Zahlen $p, q \geq 0$.

- ii) Die Menge der Wurzeln von der Form $b + ja$ für ein $j \in \mathbb{Z}$ wird von der Spiegelung s_a invariant gelassen. Insbesondere gilt

$$s_a(b + ja) = b - ja.$$

- iii) Es ist $p - q = -n(b, a)$.

Beweis :

- i) Da b eine Wurzel ist, ist $0 \in J$. Es sei p die größte und $-q$ die kleinste Zahl in J . Falls $[-q, p] \cap \mathbb{Z}$ nicht mit J übereinstimmt, so existiert irgendwo eine Lücke: es gibt dann $r, s \in J$ mit $s > r + 1$, so dass $r + 1, r + 2, \dots, s - 1$ alle nicht in J liegen. Da $b + (r + 1)a$ keine Wurzel ist, und a und b nicht proportional sind, folgt nach Satz 2.5 ii) $(a, b + ra) \geq 0$. Da $b + (s - 1)a$ keine Wurzel ist, folgt nach Satz 2.5 i) $(a, b + sa) \leq 0$. Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned} (a, b + sa) &= (a, b + ra) + (a, (s - r)a) \\ &> (a, b + ra), \end{aligned}$$

da $(s - r) > 1$ ist. Das ist ein Widerspruch.

- ii) Es ist

$$\begin{aligned} s_a(b + ja) &= s_a(b) + js_a(a) \\ &= b - n(b, a)a - ja \\ &= b - (n(b, a) + j)a. \end{aligned}$$

Für $j \in J$ ist also auch $-(n(b, a) + j) \in J$. Also bildet die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \mathbb{Z} \\ k &\mapsto -n(b, a) - k \end{aligned}$$

J in J ab. Sie ist injektiv, und da J eine endliche Menge ist, vermittelt sie also eine streng monoton fallende Bijektion von J nach J . Also muss p auf $-q$ gehen, was $-q = -n(b, a) - p$ bedeutet. Daraus folgt $p - q = -n(b, a)$ (also iii)) und

$$s_a(b + pa) = b - qa$$

(also ii)).

□

Die Menge $\{b + ja : j \in J\}$ nennen wir die a -Kette von Wurzeln, die durch b gegeben ist. Die Zahl $p + q$, also die Anzahl ihrer Elemente minus 1, nennen wir auch ihre Länge.

Korollar 2.7 *Seien a und b nicht proportional. Es sei S die a -Kette von Wurzeln, die durch b gegeben ist. Sie beginne mit $c = b - qa$. Die Länge der Kette ist dann $-n(c, a)$. Diese Länge ist 0, 1, 2 oder 3.*

Beweis : Die a -Kette von Wurzeln, die durch c gegeben ist, stimmt mit der a -Kette von Wurzeln, die durch b gegeben ist, überein. Nun ist nach Prop. 2.6 i) und iii) $\{j : c + ja \in \Phi\}$ ein Intervall der Form $[p', q']$ mit $n(c, a) = q' - p'$.

Definitionsgemäß kann aber $c + ja$ nur für $j \geq 0$ eine Wurzel sein. Also ist $p' = 0$ und $n(c, a) = q'$ die Länge der Kette.

Da a und c nicht proportional sind, kann $n(c, a)$ nach Satz 2.3 nur Werte in $[-3, 3]$ annehmen. □

Beispiele:

1. Sei $\Phi = \{\pm a, \pm b, \pm(a + b)\}$ mit $(a, a) = (b, b)$ und $\angle(a, b) = \frac{2\pi}{3}$ ein Wurzelsystem vom Typ A_2 . Dann ist $n(b, a) = 2\frac{(b, a)}{(a, a)} = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$.

Die a -Kette von Wurzeln, die durch b gegeben ist, ist

$$\{b, b + a.\}$$

Also ist hier $q = 0$ und $p = 1$.

2. Sei $\Phi = \{\pm a, \pm b, \pm(a + b), \pm(a - b)\}$ mit $\angle(a, b) = \frac{\pi}{2}$ das Wurzelsystem vom Typ B_2 .

Die a -Kette von Wurzeln, die durch b gegeben ist, ist

$$\{b - a, b, b + a.\}$$

Also ist hier $p = 1$ und $q = -1$. Diese Kette beginnt mit $c = b - a$.

Ihre Länge ist 2, und tatsächlich gilt

$$n(c, a) = n(b - a, a) = 2\frac{(b - a, a)}{(a, a)} = -2,$$

wie in Korollar 2.7 vorausgesagt.

3. Sei Φ das Wurzelsystem vom Typ G_2 aus Proposition 1.9.

Wir betrachten

$$b = -2e_1 + e_2 + e_3 \text{ und } a = e_1 - e_2.$$

Die a -Kette von Wurzeln, die durch b gegeben ist, ist

$$\{-2e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_3, e_3 - e_2, -2e_2 + e_1 + e_3\}.$$

Sie beginnt mit b und hat die Länge 3. Und tatsächlich gilt $n(b, a) = -3$, wie wir in Proposition 1.9 berechnet haben.

Proposition 2.8 *Es seien a, b zwei nicht proportionale Wurzeln, so dass auch $b + a$ eine Wurzel ist. Mit p und q bezeichnen wir die ganzen Zahlen aus Proposition 2.6. Dann gilt*

$$\frac{(b + a, b + a)}{(b, b)} = \frac{q + 1}{p}$$

Beweis : Wir bezeichnen die a -Kette von Wurzeln, die durch b gegeben ist, mit S . Da $b + a$ eine Wurzel ist, ist ihre Länge l mindestens 1. Wir haben die folgenden Fälle zu betrachten,

i) $l = 1$: Dann beginnt S mit b . Nach Korollar 2.7 ist also $n(b, a) = -1$, woraus

$$2(b, a) = -(a, a)$$

folgt. Daher ist

$$(a + b, a + b) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b) = (b, b).$$

Da $q = 0$ und $p = 1$ gilt, folgt die Behauptung.

ii) $l = 2$. Dann ist $S = \{b - a, b, b + a\}$ oder $S = \{b, b + a, b + 2a\}$.

Im ersten Fall ist $p = q = 1$ und nach Proposition 2.6 iii) also

$$n(b, a) = 0,$$

woraus $(b, a) = 0$ folgt. Also ist $\angle(a, a + b) = \frac{\pi}{4}$, woraus nach Satz 2.3 $(a + b, a + b) = 2(a, a)$, also $(a, a) = (b, b)$ folgt. Daher ist $(b + a, b + a) = 2(b, b)$, wie behauptet.

Im zweiten Fall ist $p = 2$ und $q = 0$, und nach Korollar 2.7

$$n(b, a) = -2,$$

woraus $2(b, a) = -2(a, a)$ folgt.

Da a und b nicht proportional sind, folgt ferner aus Satz 2.3, dass $\|b\| = \sqrt{2} \|a\|$, also $\frac{1}{2}(b, b) = (a, a)$ gilt.

Also folgt

$$\begin{aligned} (b + a, b + a) &= (b, b) + 2(b, a) + (a, a) = (b, b) - \frac{1}{2}(b, b) \\ &= \frac{1}{2}(b, b), \text{ wie behauptet.} \end{aligned}$$

iii) $l = 3$: In den Übungen.

□

Satz 2.9 Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem und $a, b \in \Phi$ mit $\|a\| = \|b\|$. Dann gibt es ein $g \in W(\Phi)$ mit

$$g(a) = b.$$

Beweis : Da Φ irreduzibel ist, ist $\{ga : g \in W(\Phi)\}$ ein Erzeugendensystem von V (in den Übungen). Es gibt daher ein $g \in W(\Phi)$ mit $(g(a), b) \neq 0$. Wir können a gegebenenfalls durch $g(a)$ ersetzen und $(a, b) \neq 0$ annehmen.

Aus $\|a\| = \|b\|$ folgt $n(a, b) = n(b, a)$. Indem wir eventuell a durch $s_a(a) = -a$ ersetzen, können wir also annehmen, dass $n(a, b) > 0$ ist. Aus Satz 2.3 folgt, dass dann entweder $a = b$ gilt, woraus unsere Behauptung folgt, oder dass $n(a, b) = n(b, a) = 1$ gilt.

Im zweiten Fall berechnen wir $s_a(b) = b - a$ und $s_b(a) = a - b$, also folgt

$$\begin{aligned} s_b s_a s_b(a) &= s_b s_a(a - b) \\ &= s_b(-a - s_a(b)) \\ &= s_b(-b) \\ &= b, \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

3 Reduzierte Wurzelsysteme

Mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts untersuchen wir jetzt den Zusammenhang zwischen reduzierten und nicht reduzierten Wurzelsystemen.

Ein Wurzelsystem heißt reduziert, falls für alle $a \in \Phi$

$$\langle a \rangle \cap \Phi = \{a, -a\}$$

gilt (siehe Definition 1.3).

Nach Korollar 2.4 ist Φ also genau dann reduziert, wenn alle Wurzeln in Φ indivisibel sind.

Proposition 3.1 Φ sei ein irreduzibles und reduziertes Wurzelsystem.

i) Für alle $a, b \in \Phi$ ist

$$\frac{(b, b)}{(a, a)} \in \left\{ 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3} \right\}.$$

ii) Die Menge aller (a, a) für $a \in \Phi$ besteht höchstens aus zwei Elementen.

Beweis : Sei $b \in \Phi$. Sei $\Phi_1 = \{g(b) : g \in W(\Phi)\} \subset \Phi$. Sei $\Phi_2 = \{a \in \Phi : (a, c) = 0 \forall c \in \Phi_1\}$. Falls $\Phi_2 \neq \emptyset$ ist, so ist $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ eine Zerlegung von Φ in Wurzelsysteme von kleinerem Rang. Das widerspricht der Irreduzibilität.

Also existiert für jede Wurzel a ein $g \in W(\Phi)$ mit

$$(a, g(b)) \neq 0.$$

Gleichzeitig gilt $(g(b), g(b)) = (b, b)$. Nun ist

$$\frac{(b, b)}{(a, a)} = \frac{(g(b), g(b))}{(a, a)} = \frac{n(g(b), a)}{n(a, g(b))},$$

und dieser Wert ist nach Satz 2.3 in $\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\}$ enthalten, da $n(g(b), a) \neq 0$ ist und da Φ reduziert ist und somit die Fälle $b = \pm 2a$ ausgeschlossen sind. Das liefert i).

Es sei $a \in \Phi$ eine Wurzel mit (a, a) minimal. Dann gilt für alle $b \in \Phi$ also

$$\frac{(b, b)}{(a, a)} \in \{1, 2, 3\}.$$

Angenommen, es gibt b und c in Φ mit $\frac{(b, b)}{(a, a)} = 2$ und $\frac{(c, c)}{(a, a)} = 3$. Dann folgt $\frac{(c, c)}{(b, b)} = \frac{3}{2}$, was nach i) ausgeschlossen ist. Also ist $\left\{ \frac{(b, b)}{(a, a)} : b \in \Phi \right\}$ in $\{1, 2\}$ oder in $\{1, 3\}$ enthalten, woraus ii) folgt. \square

Proposition 3.2 *Sie Φ ein irreduzibles, nicht reduziertes Wurzelsystem vom Rang ≥ 2 .*

- i) Φ_0 sei die Teilmenge aller indivisiblen Wurzeln. Dann ist Φ_0 ein irreduzibles und reduziertes Wurzelsystem mit $W(\Phi_0) = W(\Phi)$.
- ii) Es sei A die Menge aller Wurzeln, für die (a, a) seinen minimalen Wert λ annimmt. Dann sind je zwei nicht-proportionale Elemente in A orthogonal.
- iii) Sei $B = \{b \in B : (b, b) = 2\lambda\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= A \cup B \\ \Phi &= A \cup B \cup 2A. \end{aligned}$$

Beweis : i) Für $a \in \Phi \setminus \Phi_0$ ist $\frac{1}{2}a \in \Phi$, aber $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a) \notin \Phi$ nach Korollar 2.4i). Also ist $\frac{1}{2}a$ indivisibel und somit in Φ_0 . Daher ist Φ_0 ein Erzeugendensystem von V . Wir betrachten für $a \in \Phi_0$ und $b \in \Phi_0$ das Element

$$s_a(b) = b - 2\frac{(b, a)}{(a, a)}a$$

aus Φ . Es ist indivisibel, denn aus $\frac{1}{2}s_a(b) \in \Phi$ folgte $s_a(b) (\frac{1}{2}s_a(b)) = \frac{1}{2}s_a \circ s_a(b) = \frac{1}{2}b \in \Phi$. Also lässt für jedes $a \in \Phi_0$ die Spiegelung s_a die Teilmenge Φ_0 invariant.

Dass für $a, b \in \Phi_0$ der Wert $2\frac{(a,b)}{(b,b)}$ immer ganz ist, folgt aus der Tatsache, dass Φ_0 Teilmenge eines Wurzelsystems ist.

Da alle Wurzeln in Φ_0 indivisibel sind, ist Φ_0 reduziert. Für $a \in \Phi \setminus \Phi_0$ ist (wie oben gezeigt) $\frac{1}{2}a \in \Phi_0$. Da

$$s_{\frac{1}{2}a} = s_a$$

ist, gilt offenbar $W(\Phi) = W(\Phi_0)$. Eine Zerlegung von Φ_0 als direkte Summe von Wurzelsystemen $\Phi_0 = \Phi_0^{(1)} \cup \Phi_0^{(2)}$ von kleinerem Rang würde schließlich eine Zerlegung von Φ in die Wurzelsysteme

$$\Phi^{(i)} = \{a \in \Phi : a \in \Phi_0^{(i)} \text{ oder } \frac{1}{2}a \in \Phi_0^{(i)}\}$$

nach sich ziehen. Daher ist mit Φ auch Φ_0 irreduzibel.

ii)+iii) Da Φ nicht reduziert ist, existiert ein $a \in \Phi_0$ mit $2a \in \Phi$.

Wegen $\dim V \geq 2$ existiert eine Wurzel $b \in \Phi_0$, die linear unabhängig von a ist. Indem wir (wie im Beweis von Proposition 3.1) eventuell b durch $g(b)$ für ein $g \in W(\Phi)$ ersetzen, können wir annehmen, dass außerdem $n(b, a) \neq 0$ ist. Indem wir eventuell noch b durch $-b$ ersetzen, können wir sogar

$$n(b, a) > 0$$

annehmen. Nun ist

$$\frac{1}{2}n(b, a) = \frac{(b, a)}{(a, a)} = 2\frac{(b, 2a)}{(2a, 2a)} = n(b, 2a).$$

Also ist $n(b, a) \in 2\mathbb{Z}$.

Wir konsultieren die Liste aller Möglichkeiten in Satz 2.3 und schließen

$$n(b, a) = 2 \text{ und } (b, b) = 2(a, a).$$

Nun kann (c, c) für $c \in \Phi_0$ nach Proposition 3.1 ii) nur höchstens zwei Werte annehmen. Also ist für alle $c \in \Phi_0$

$$(c, c) = (a, a) \text{ oder } (c, c) = 2(a, a).$$

Somit ist $\lambda = (a, a)$ und $\Phi_0 = A \cup B$. Für $c \in \Phi \setminus \Phi_0$ ist $\frac{1}{2}c \in \Phi_0$ und somit

$$\left(\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c\right) = (a, a) \text{ oder } \left(\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c\right) = 2(a, a).$$

Im zweiten Fall wäre

$$(c, c) = 8(a, a),$$

was nach Proposition 3.1 i) ausgeschlossen ist. Also gilt

$$\left(\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c\right) = (a, a) = \lambda,$$

woraus

$$\Phi \subset A \cup B \cup 2A$$

folgt. Umgekehrt gilt offenbar $A \cup B = \Phi_0 \subset \Phi$, und für jedes $c \in A$ gibt es nach Satz 2.9 ein $g \in W(\Phi)$ mit $g(c) = a$. Daraus folgt $2c = g(2a) \in \Phi$, so dass auch $2A \subset \Phi$ gilt.

Schließlich betrachten wir zwei nicht-proportionale Wurzeln c, c' in A . Dann ist $2c \in \Phi$ und $2c' \in \Phi$, also

$$n(2c, c') = 2n(c, c') = 4n(c, 2c') \in 4\mathbb{Z}.$$

Nach Satz 2.3 folgt daraus, dass c und c' orthogonal sind. \square

Proposition 3.3 *Es sei Φ ein irreduzibles und reduziertes Wurzelsystem, so dass (a, a) die Werte λ und 2λ annimmt. Wir setzen*

$$A = \{a \in \Phi : (a, a) = \lambda\}$$

und nehmen an, dass je zwei nicht-proportionale Elemente aus A orthogonal sind. Dann ist

$$\Phi_1 = \Phi \cup 2A$$

ein irreduzibles nicht-reduziertes Wurzelsystem, dessen Menge indivisibler Wurzeln gerade Φ ist.

Beweis : Offenbar ist Φ_1 ein Erzeugendensystem von V , das nicht die Null enthält und invariant unter allen Spiegelungen für $a \in \Phi_1$ ist. Wir müssen also nur zeigen, dass für alle $a, b \in \Phi_1$

$$n(a, b) = 2 \frac{(a, b)}{(b, b)} \in \mathbb{Z}$$

ist. Dies ist klar für $a, b \in \Phi$ sowie für $a \in 2A$ und $b \in \Phi$.

$$\text{Da } \frac{(2a, 2b)}{(2b, 2b)} = \frac{(a, b)}{(b, b)} \text{ ist,}$$

gilt die Behauptung auch für $a, b \in 2A$. Es bleibt also der Fall $a \in \Phi, b \in 2A$ zu betrachten. Dann ist $b = 2c$ für ein $c \in A$.

Falls c proportional zu a ist, so ist $a = \pm c$, denn Φ ist reduziert. Dann ist $n(a, b) = 2 \frac{(a, \pm 2a)}{(\pm 2a, \pm 2a)} \in \mathbb{Z}$. Falls c nicht proportional zu a ist und a ebenfalls in A liegt, so sind c und a nach Voraussetzung orthogonal, woraus $n(a, b) = 0$ folgt. Falls c nicht proportional zu a ist und a nicht in A liegt, so gilt

$$(a, a) = 2\lambda = 2(c, c),$$

woraus nach Satz 2.3 entweder $n(a, c) = 0$ oder $n(a, c) = \pm 2$ folgt. Daraus folgt

$$n(a, b) = 2 \frac{(a, 2c)}{(2c, 2c)} = \frac{1}{2} n(a, c) \in \mathbb{Z}.$$

Also ist Φ_1 ein Wurzelsystem. Die anderen Behauptungen folgen direkt (ÜA). \square

4 Kammern und Basen

Sei Φ ein Wurzelsystem in V . Wir betrachten nun für jede Wurzel $a \in \Phi$ die Hyperebene

$$\begin{aligned} H_a := \langle a \rangle^\perp &= \{x \in V : (x, a) = 0\} \\ &= \{x \in V : s_a(x) = x\}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine endliche Familie $\mathcal{H} = \{H_a : a \in \Phi\}$ von Hyperebenen in V (auch Hyperebenen-Arrangement genannt). Für jedes $H_a \in \mathcal{H}$ ist $V \setminus H_a$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R} -Vektorraums V . Sie zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten (offene Halbräume). Wir ergänzen a zu einer Orthogonalbasis a, b_1, \dots, b_{n-1} von V . Dann ist

$$V \setminus H_a = \{\lambda_0 a + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n-1} b_{n-1} : \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_0 \neq 0\}.$$

Die beiden offenen Halbräume sind

$$(V \setminus H_a)^+ = \{\lambda_0 a + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n-1} b_{n-1} : \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_0 > 0\}$$

und

$$(V \setminus H_a)^- = \{\lambda_0 a + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n-1} b_{n-1} : \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_0 < 0\}.$$

Definition 4.1 *Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf V durch*

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow \text{für jedes } H_a \in \mathcal{H} \text{ tritt einer der} \\ &\text{drei folgenden Fälle ein:} \\ &i) \ x, y \in H_a \\ &ii) \ x, y \in (V \setminus H_a)^+ \\ &iii) \ x, y \in (V \setminus H_a)^-. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: x und y sind genau dann äquivalent, wenn sie für jede Hyperebene H_a entweder beide in H_a oder auf derselben Seite des Komplementes liegen. Sie haben also relativ zum Hyperebenenarrangement \mathcal{H} dieselbe Position.

Definition 4.2 *Jede Äquivalenzklasse der oben definierten Äquivalenzrelation nennen wir eine Seite von \mathcal{H} .*

Offenbar ist die Menge der Seiten endlich.

Sei F eine Seite und $x \in F$. Dann gilt

$$F \subset H_a \Leftrightarrow x \in H_a.$$

Wir nennen den linearen Unterraum

$$L_F = \bigcap_{x \in H_a} H_a = \bigcap_{F \subset H_a} H_a$$

den Träger von F . Ist F in keinem H_a enthalten, so setzen wir $L_F = V$. Wir nennen die Dimension von L_F auch „Dimension von F “.

Ist $x \notin H_a$, so bezeichnen wir mit

$$D_{H_a}(x)$$

den Halbraum von $V \setminus H_a$, der x enthält, also entweder $(V \setminus H_a)^-$ oder $(V \setminus H_a)^+$. Dann ist

$$F = L_F \cap \bigcap_{x \notin H_a} D_{H_a}(x).$$

Lemma 4.3 Sei \overline{F} der Abschluss von F im \mathbb{R} -Vektorraum V . Dann ist

$$\overline{F} = L_F \cap \bigcap_{x \notin H_a} \overline{D_{H_a}(x)}.$$

Beweis : Offenbar ist die rechte Seite abgeschlossen und enthält F . Also gilt „ \subset “. Ist umgekehrt $y \in L_F \cap \bigcap_{x \notin H_a} \overline{D_{H_a}(x)}$, so betrachten wir die Strecke

$$[x, y] = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\} \subset V.$$

Diese ist in L_F enthalten und bis auf den Endpunkt y auch in allen $D_{H_a}(x)$. Daher ist $y \in \overline{F}$. \square

Proposition 4.4 Es sei F eine Seite und L der Träger von F .

- i) F ist eine konvexe offene Teilmenge von L .
- ii) Der Abschluss von F in V ist die Vereinigung von F und von Seiten echt kleinerer Dimension.

Beweis : Sei $x \in F$.

- i) Als Schnitt von konvexen Teilmengen ist auch $F = L \cap \bigcap_{x \notin H_a} D_{H_a}(x)$ konvex. Als endlicher Schnitt von offenen Teilmengen ist $\bigcap_{x \notin H_a} D_{H_a}(x)$ offen. Also ist $F = L \cap \bigcap_{x \notin H_a} D_{H_a}(x)$ offen in L .

- ii) Jeder Punkt in V ist in einer Seite enthalten. Für $y \in \overline{F} \setminus F$ sei F' die Seite, die y enthält. Sei $L' = \bigcap_{y \in H_a} H_a$ der Träger von F' . Aus $y \in \overline{F} \subset L$ folgt $L' \subset L$. Da $y \notin F$ liegt, muss $L' \subsetneq L$ sein. Nun ist

$$F' = L' \cap \bigcap_{y \notin H_a} D_{H_a}(y)$$

und

$$\overline{F} = L \cap \bigcap_{x \notin H_a} \overline{D_{H_a}(x)}.$$

Für alle a mit $y \notin H_a$ ist auch $x \notin H_a$. Somit folgt aus $y \in \overline{D_{H_a}(x)}$ bereits $D_{H_a}(x) = D_{H_a}(y)$. Also erhalten wir in der Tat $F' \subset \overline{F}$. Das beweist ii). \square

Proposition 4.5 *Es seien F und F' zwei Seiten. Falls $\overline{F} = \overline{F'}$ ist, so folgt $F = F'$.*

Beweis : Angenommen, es gibt einen Punkt $x \in F'$ mit $x \in \overline{F} \setminus F$. Dann haben wir im Beweis von Proposition 4.4 ii) gesehen, dass dann der Träger L' von F' echt kleiner als der Träger L von F ist. Aus

$$\overline{F} = \overline{F'} \subset L'$$

folgt aber $F \subset L'$. Für jede Hyperebene H_a mit $F' \subset H_a$ ist also auch $F \subset H_a$. Somit ist

$$L = \bigcap_{F \subset H_a} H_a \subset L' = \bigcap_{F' \subset H_a} H_a$$

im Widerspruch zu $L' \subsetneq L$. □

Proposition 4.6 *Sei F eine Seite, und sei $M = \bigcap_{a \notin \Psi} H_a$ für eine Teilmenge Ψ von Φ . Dann sind äquivalent:*

- i) *es gibt eine Seite F' mit Träger M , so dass $F' \cap \overline{F} \neq \emptyset$.*
- ii) *es gibt eine Seite F' mit Träger M , so dass $F' \subset \overline{F}$.*
- iii) *es gibt ein $x \in M \cap \overline{F}$, so dass gilt: $M \not\subset H_a \Rightarrow x \notin H_a$.*

Beweis :

i) \Rightarrow ii) gilt nach Proposition 4.4ii).

ii) \Rightarrow iii) Sei $x \in F' \subset M \cap \overline{F}$. Dann gilt: $x \in H_a \Rightarrow F' \subset H_a \Rightarrow M \subset H_a$.

iii) \Rightarrow i) Sei $x \in M \cap \overline{F}$, so dass gilt $M \not\subset H_a \Rightarrow x \notin H_a$. Ferner sei F' die Seite, die x enthält. Dann ist $x \in F' \cap \overline{F} \neq \emptyset$. Wir wollen noch zeigen, dass F' den Träger M hat. Ist $x \in H_a$, so folgt $M \subset H_a$, also ist M im Träger von F' enthalten. Andererseits ist $x \in M$, also gilt $x \in H_a$ für alle $a \in \Psi$. Daher ist der Träger von F' auch in $\bigcap_{a \in \Psi} H_a = M$ enthalten.

□

Definition 4.7 *Eine Kammer im Hyperebenenarrangement $\mathcal{H} = \{H_a : a \in \Phi\}$ ist eine Seite, die in keiner Hyperebene H_a enthalten ist.*

Sei $U = V \setminus \bigcup_{a \in \Phi} H_a$. U ist eine offene Teilmenge von V . Die Kammern sind genau diejenigen Seiten, die in U enthalten sind. Jede Kammer ist nach Proposition 4.4 i) eine konvexe offene Teilmenge von U , also insbesondere zusammenhängend. Also sind die Kammern gerade die Zusammenhangskomponenten von U .

Proposition 4.8 *Jeder Punkt in V liegt im Abschluss \overline{C} für mindestens eine Kammer C .*

Beweis : Falls $x \in V$ in einer Kammer liegt, ist nichts zu zeigen. Ansonsten liegt x in einer Seite

$$F = L \cap \bigcap_{x \notin H_a} D_{H_a}(x)$$

mit Träger $L \subset V$.

Wir wählen einen Punkt y , der in keinem der H_a enthalten ist und betrachten die Verbindungsstrecke $[x, y]$ sowie eine Folge x_n auf dieser Strecke, die gegen x konvergiert mit $x_n \neq x$. Wir können annehmen, dass für alle a mit $x \notin H_a$ die ganze Folge in $D_{H_a}(x)$ liegt, denn diese Teilmenge von V ist offen.

Für $x \in H_a$ liegt $x_n \notin H_a$, denn sonst würde die gesamte Gerade und damit auch y in H_a liegen. Also liegt jedes x_n in einer Kammer. Da es nur endlich viele Kammern gibt, können wir nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass alle x_n in derselben Kammer liegen. In ihrem Abschluss liegt dann x . \square

Proposition 4.9 *Sei L eine Hyperebene von V und $\Omega \in L$ eine nicht-leere, relativ offene Teilmenge.*

- i) Falls $L \notin \mathcal{H}$, so gibt es eine Kammer C mit $C \cap \Omega \neq \emptyset$.
- ii) Falls $L \in \mathcal{H}$, so gibt es ein $x \in \Omega$, das in keiner Hyperebene $H \neq L$ aus \mathcal{H} liegt.

Beweis : Wir betrachten

$$\mathcal{H}_L = \{L \cap H : H \in \mathcal{H}, H \neq L\}.$$

Das ist eine endliche Familie von Hyperebenen im Vektorraum L . Wähle ein $x \in \Omega$. Nach Proposition 4.8 liegt x im Abschluss mindestens einer Kammer Γ bezüglich des Hyperebenenarrangements \mathcal{H}_L . Dann trifft eine offene Umgebung von x in Ω die entsprechende Kammer Γ , d.h. es gibt ein $y \in \Omega \cap \Gamma$.

i) Falls $L \notin \mathcal{H}$ ist, so folgt $y \notin H_a$ für alle $H_a \in \mathcal{H}$, also liegt y in einer Kammer bezüglich \mathcal{H} in V .

ii) Falls $L \in \mathcal{H}$, so folgt $y \notin H_a$ für alle $H_a \in \mathcal{H}$ mit $H_a \neq L$.

\square

Definition 4.10 *Sei C eine Kammer in V bezüglich des Hyperebenenarrangements $\mathcal{H} = \{H_a : a \in \Phi\}$.*

Wir nennen eine Seite F in \overline{C} der Dimension $n-1$ eine Facette von C . Den Träger einer Facette nennen wir auch eine Wand von C .

Eine Facette von \overline{C} ist also eine Seite in \overline{C} , deren Träger eine der Hyperebenen H_a ist. Diese Hyperebene heißt dann Wand von C . Jede Wand ist Träger genau einer Facette.

Lemma 4.11 *Jedes $H_a \in \mathcal{H}$ ist die Wand mindestens einer Kammer.*

Beweis : Nach Proposition 4.9ii) gibt es einen Punkt $y \in H_a$, der in keiner Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ mit $H \neq H_a$ enthalten ist. Nach Proposition 4.8 liegt y im Abschluss einer Kammer. Daher ist die Seite, die y enthält, eine Facette von C mit Wand H_a . \square

Satz 4.12 *Es sei C eine Kammer und \mathfrak{M} sei die Menge ihrer Wände. Dann ist*

$$C = \bigcap_{H \in \mathfrak{M}} D_H(C).$$

Für jede Teilmenge \mathfrak{N} von \mathcal{H} mit

$$C = \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} D_H(C)$$

gilt $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

Eine Seite F von \overline{C} ist genau dann eine Facette, wenn F eine Facette bezüglich des Hyperebenenarrangements \mathfrak{M} ist.

Beweis : Sei $\mathfrak{N} \subset \mathcal{H}$ eine Teilmenge mit $C = \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} D_H(C)$. Sei $H_0 \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{N}$. Falls H_0 eine Wand von C ist, so folgt nach Proposition 4.6, dass es ein $x \in H_0 \cap \overline{C}$ gibt, so dass aus $x \in H_a$ bereits $H_0 \subset H_a$, also $H_0 = H_a$ folgt. Mit anderen Worten, x ist nur in der Hyperebene H_0 enthalten. Dasselbe Argument wie in Lemma 4.3 zeigt aber

$$\overline{C} = \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} \overline{D_H(C)}.$$

Daher gilt für jedes $H \in \mathfrak{N}$:

$$x \in D_H(C) \text{ oder } x \in H.$$

Da x in keinem $H \in \mathfrak{N}$ liegt, folgt

$$x \in \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} D_H(C) = C,$$

das ist ein Widerspruch zu $x \in H_0$. Somit ist tatsächlich

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}.$$

Offenbar ist $C \subset \bigcap_{H \in \mathfrak{M}} D_H(C)$. Ist H eine Hyperebene in \mathcal{H} , die keine Wand ist, so folgt aus Proposition 4.6, angewandt auf $M = H$: für alle $x \in H \cap \overline{C}$ gibt es ein $H_a \in \mathcal{H}$, das x enthält, aber ungleich H ist. Wir betrachten die Teilmenge

$$C' = \bigcap_{H_a \neq H} D_{H_a}(C)$$

von V . Dann ist C' eine offene, konvexe Menge, die C enthält. Falls C' nicht in $D_H(C)$ enthalten ist, so existiert ein $x \in C' \cap H$. Dann existiert also ein $H_a \neq H$, das x enthält. Das steht im Widerspruch zur Definition von C' . Also ist $C' \subset D_H(C)$, woraus

$$C = C'$$

folgt. Falls es eine weitere Hyperebene in \mathcal{H} gibt, die keine Wand von C ist, wiederholen wir dieses Argument. Nach endlich vielen Schritten können wir schließen, dass $C = \bigcap_{H \in \mathfrak{M}} D_H(C)$ gilt.

Wir zeigen noch die letzte Aussage. Ist F eine Facette bezüglich \mathcal{H} , so auch bezüglich \mathfrak{M} , da \mathfrak{M} alle Wände enthält. Ist umgekehrt F eine Facette von C bezüglich \mathfrak{M} , so gilt $F = \overline{C} \cap H$ für ein $H \in \mathfrak{M}$, d.h. F ist eine Facette für \mathcal{H} . \square

Korollar 4.13 *Sei C eine Kammer und \mathfrak{M} die Menge ihrer Wände. Dann ist*

$$\overline{C} = \bigcap_{H \in \mathfrak{M}} \overline{D_H(C)}.$$

Beweis : Das folgt aus Satz 4.12 mit demselben Argument wie im Beweis von Lemma 4.3. \square

Jetzt zeigen wir ein wichtiges Resultat über den Zusammenhang zwischen Kammern und der Weylgruppe $W = W(\Phi)$.

Für jedes $a \in \Phi$ ist die Spiegelung s_a eine orthogonale Abbildung von V , die das Wurzelsystem Φ in sich überführt. Ist $s_a(b) = c \in \Phi$, so bildet s_a auch H_b in H_c ab. Somit permutiert s_a die Hyperebenen im Hyperebenenarrangement \mathcal{H} .

Ist $s_a(H_b) = H_c$, so bildet s_a für jedes $x \in V$ den Halbraum $D_{H_b}(x)$ auf den Halbraum $D_{H_c}(s_a(x))$ ab. (ÜA). Also ist für jede Seite F in V das Bild $s_a(F)$ wieder eine Seite in V .

Hat F den Träger L , so hat $s_a(F)$ den Träger $s_a(L)$. Somit haben F und $s_a(F)$ dieselbe Dimension. Insbesondere bildet s_a Kammern in Kammern ab.

Da jedes $w \in W$ sich als Produkt von Spiegelungen s_a schreiben lässt, gilt auch: w bildet Seiten auf Seiten und Kammern auf Kammern ab. Ist C eine Kammer, so werden die Wände von C unter w auf die Wände der Kammern $w(C)$ abgebildet.

Satz 4.14 *Sei C ein Kammer in V bezüglich $\mathcal{H} = \{H_a : a \in \Phi\}$.*

- i) Für jedes $x \in V$ existiert ein $w \in W$ mit $w(x) \in \overline{C}$.*
- ii) Für jede Kammer C' existiert ein $w \in W$ mit $w(C') = C$. (Mit anderen Worten: W operiert transitiv auf der Menge der Kammern).*

iii) Die Gruppe W wird erzeugt von der Menge $\{s_a : H_a \text{ Wand von } C\}$, d.h. jedes $w \in W$ lässt sich als Produkt von Spiegelungen an Wänden von C schreiben.

Beweis : Sei \mathfrak{M} die Menge der Wände von C und sei $W_{\mathfrak{M}} \subset W$ die Untergruppe, die von der Menge $\{s_a : H_a \in \mathfrak{M}\}$ erzeugt wird.

i) Sei $x \in V$. Wir werden sogar zeigen: Es gibt ein $w \in W_{\mathfrak{M}}$ mit $w(x) \in \overline{C}$. Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt $a \in C$. Die Gruppe W ist endlich, denn man kann sie mit einer Untergruppe der Permutationsgruppe aller Wurzeln identifizieren (Übungen). Also ist auch $W_{\mathfrak{M}}$ und die Bahn von x unter $W_{\mathfrak{M}}$, also

$$J = \{wx : w \in W_{\mathfrak{M}}\},$$

endlich. Daher existiert ein $y = wx \in J$ mit

$$d(a, y) \leq d(a, y')$$

für alle $y' \in J$.

Hier schreiben wir $d(a, y) = \sqrt{(a - y, a - y)}$ für den euklidischen Abstand in V . Sei H eine Wand von C , und sei $s \in W_{\mathfrak{M}}$ die zugehörige Spiegelung an H . Dann ist $s(y) \in J$, also folgt

$$(a - y, a - y) = d(a, y)^2 \leq d(a, s(y))^2 = (a - s(y), a - s(y)).$$

Wir schreiben $y = h + n$ mit $h \in H$ und $n \in H^\perp$. Dann ist $s(y) = h - n$. Also folgt

$$(a - h - n, a - h - n) \leq (a - h + n, a - h + n),$$

woraus

$$-2(a - h, n) \leq 2(a - h, n),$$

also $(a - h, n) \geq 0$ folgt. Da $a \notin H$ ist, folgt sogar $(a - h, n) > 0$. (*)

Nun liegt $a \in C \subset D_H(a)$. Wir zeigen nun, dass die Strecke

$$[a, y[= \{a + t(y - a) : t \in [0, 1]\}$$

ganz in $D_H(a)$ liegt.

Falls nicht, so schneidet $[a, y[$ die Hyperebene H im Punkt $a + t(y - a)$ für ein $0 < t < 1$. Wir setzen $y = h + n$ ein und erhalten

$$a(1 - t) + t(h + n) \in H,$$

also $a(1 - t) + tn \in H$, und daher auch $(a - h)(1 - t) + tn \in H$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= ((a - h)(1 - t) + tn, n) \\ &= (1 - t)(a - h, n) + t(n, n) \\ &\geq (1 - t)(a - h, n) \end{aligned}$$

also mit $0 < t < 1$ ein Widerspruch zu (*).

Daher $[a, y[$ im Halbraum $D_H(a)$ und der Endpunkt y in $\overline{D_H(a)}$. Insgesamt ergibt sich:

$$y = w(x) \in \bigcap_{H \in \mathfrak{M}} \overline{D_H(a)},$$

und die rechte Seite stimmt nach Korollar 4.13 mit dem Abschluss \overline{C} überein.

- ii) Sei C' eine Kammer und a' ein Punkt in C' . Dann existiert nach i) ein $w \in W_{\mathfrak{M}}$ mit $w(a') \in \overline{C}$. Daher ist

$$w(C') \cap \overline{C} \neq \emptyset.$$

Nach Proposition 4.4 ist also die Seite $w(C')$ ganz in \overline{C} enthalten. Da $w(C')$ auch eine Kammer ist, folgt nach Proposition 4.4 $w(C') = C$.

- iii) Es bleibt $W = W_{\mathfrak{M}}$ zu zeigen. Dazu genügt es zu zeigen, dass alle s_a für $a \in \Phi$ in $W_{\mathfrak{M}}$ enthalten sind. Wir betrachten die zugehörige Hyperebene H_a . Nach Lemma 4.11 gibt es eine Kammer C' , so dass H_a eine Wand von C' ist. Im Beweis von i) und ii) haben wir gesehen, dass es ein $w \in W_{\mathfrak{M}}$ gibt mit

$$C' = w(C).$$

Also ist $w^{-1}(H_a)$ eine Wand von $w^{-1}(C') = C$. Die Spiegelung an $w^{-1}(H_a)$ liegt also in $W_{\mathfrak{M}}$. Sie ist gleich $w^{-1} \circ s_a \circ w$ (ÜA), also folgt $s_a \in W_{\mathfrak{M}}$.

□

Satz 4.15 Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem und C eine Kammer mit Wänden H_1, \dots, H_m .

- i) Für jedes i existiert dann genau eine indivisible Wurzel $a_i \in \Phi$ mit $H_i = H_{a_i}$, so dass $D_{H_i}(a_i) = D_{H_i}(C)$. Mit anderen Worten: a_i liegt auf derselben Seite von H_i wie C .
- ii) Die Wurzeln a_1, \dots, a_m aus i) bilden eine Basis von V . Insbesondere hat C $\dim(V)$ -viele Wände.

Beweis :

- i) Es ist $H_i = H_{bi}$ für eine Wurzel $bi \in \Phi$. Nun ist

$$H_{bi} = H_{kbi}$$

für alle $k \in \mathbb{Q}$, für die kbi eine Wurzel ist. (Dies kann nur für $k \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2\}$ passieren).

Wir finden also eine indivisible Wurzel a_i mit $H_{bi} = H_{a_i}$. Da $a_i \notin H_i$, liegen a_i und $-a_i = s_{H_i}(a_i)$ auf verschiedenen Seiten von H_i . Eine der beiden Wurzeln liegt in $D_{H_i}(C)$.

Nach Vertauschen von a_i und $-a_i$ können wir $a_i \in D_{H_i}(C)$, also $D_{H_i}(a_i) = D_{H_i}(C)$ annehmen. Es ist klar, dass a_i die einzige indivisible Wurzel mit dieser Eigenschaft ist.

- ii) Wir zeigen zunächst für alle $a \in \Phi$:

$$D_{H_a}(a) = \{x \in V : (x, a) > 0\}.$$

Dazu ergänzen wir a zu einer Orthogonalbasis a, b_2, \dots, b_n von V . Dann liegen b_2, \dots, b_n in H . Es ist

$$D_{H_a}(a) = \{x = \lambda_1 a + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \in V : \lambda_1 > 0\},$$

$$\text{und } (x, a) = (\lambda_1 a + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n, a)$$

$$= \lambda_1 (a, a).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. Somit folgt

$$C = \bigcap_{i=1}^m D_{H_i}(C)$$

$$= \bigcap_{i=1}^m D_{H_i}(a_i)$$

$$= \{x \in V : (x, a_i) > 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, m\}.$$

Wir betrachten den von $\{a_1, \dots, a_m\}$ erzeugten Untervektorraum U von V .

Für jede Spiegelung s_{a_i} an H_i ist $s_{a_i}(a_j)$ eine Linearkombination von a_i und a_j , also in U enthalten. Daher wird U von den Spiegelungen an Wänden von C in sich überführt. Nach Satz 4.14 iii) wird U also von der Weylgruppe W invariant gelassen. Aus den Übungen wissen wir, dass für jede Wurzel $a \in \Phi$ die Menge $\{wa : w \in W\}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Es folgt $U = V$. Damit erzeugen $\{a_1, \dots, a_m\}$ den Vektorraum V . Wir zeigen jetzt noch, dass sie linear unabhängig sind. Angenommen,

$$\sum_{i=1}^m c_i a_i = 0 \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}$$

ist eine Linearkombination der Null. Wir zeigen zunächst $(a_i, a_j) \leq 0$ für $i \neq j$. Wäre nämlich $(a_i, a_j) > 0$, für $i \neq j$, so wäre nach Satz 2.5 $a_i - a_j \in \Phi$. Nun ist H_i eine Wand von C . Es sei $F_i = \overline{C} \cap H_i$ die entsprechende Seite von \overline{C} . Nach Proposition 4.9 existiert ein $x \in F_i$, das in keiner anderen Hyperebene aus \mathcal{H} liegt. Also gilt

$$a_i(x) = 0 \text{ und } a_j(x) > 0.$$

Somit ist $(a_i - a_j)(x) < 0$.

Mit demselben Argument existiert ein $y \in \overline{C} \cap H_j$, so dass

$$a_j(y) = 0 \text{ und } a_i(y) > 0,$$

woraus $(a_i - a_j)(y) > 0$ folgt.

Nun ist aber die Kammer C ganz in einem der Halbräume zur Wurzel $a_i - a_j$ enthalten, d.h. wir haben

$$\overline{C} \subset \{x : (a_i - a_j)(x) \geq 0\}$$

oder

$$\overline{C} \subset \{x : (a_i - a_j)(x) \leq 0\}.$$

Das liefert einen Widerspruch. Also ist tatsächlich $(a_i, a_j) \leq 0$ für $i \neq j$. Daraus folgt für unsere Linearkombination $\sum_{i=1}^m c_i a_i = 0$:

$$0 \leq \left(\sum_{i=1}^m |c_i| a_i, \sum_{i=1}^m |c_i| a_i \right) \leq \left(\sum_{i=1}^m c_i a_i, \sum_{i=1}^m c_i a_i \right) = 0,$$

woraus $\sum_{i=1}^m |c_i| a_i = 0$ folgt. Für $x \in C$ ergibt sich also

$$0 \leq \left(\sum_{i=1}^m |c_i| a_i, x \right) = \sum_{i=1}^m |c_i| (a_i, x).$$

Da alle $(a_i, x) > 0$ sind, folgt

$$c_1 = \dots = c_m = 0.$$

Die Wurzeln a_1, \dots, a_m zu den Wänden bilden also tatsächlich eine Basis von V .

□

Definition 4.16 Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem und C eine Kammer zu $\mathcal{H} = \{H_a : a \in \Phi\}$.

i) Die Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ von V zu den Wänden von C aus Satz 4.15 bezeichnen wir mit $B(C)$.

ii) Wir nennen eine Teilmenge $B \subset \Phi$ eine Basis des Wurzelsystems Φ , falls es eine Kammer C mit

$$B = B(C)$$

gibt.

Proposition 4.17 Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem und B eine Basis von Φ . Für jede irreduzible Wurzel $a \in \Phi$ existiert ein $b \in B$ und ein $w \in W(\Phi)$ mit

$$a = w(b).$$

Beweis : Sei C die Kammer mit $B(C) = B$. Die Hyperebene $H_a = \langle a \rangle^\perp$ ist nach Lemma 4.11 die Wand einer Kammer C' . Nach Satz 4.14 ii) existiert ein $w \in W(\Phi)$ mit $w(C') = C$. Also ist $w(H_a)$ eine Wand von C . Es gibt somit ein $b \in B(C)$ mit $w(H_a) = H_b$. Also folgt $w\langle a \rangle = \langle b \rangle$, das heißt, $w(a)$ ist proportional zu b . Da beide Wurzeln indivisibel sind, folgt $w(a) = \pm b$. Falls $w(a) = -b$ ist, so ist

$$(s_b \circ w)(a) = b,$$

und unsere Behauptung folgt. □

Satz 4.18 Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von Φ . Dann ist jede Wurzel $a \in \Phi$ eine Linearkombination der Basiselemente mit ganzen Koeffizienten, die dasselbe Vorzeichen haben. Mit anderen Worten: Setzen wir

$$\Phi^+ = \left\{ a = \sum_{i=1}^n n_i b_i : n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a \in \Phi \right\}$$

und

$$\Phi^- = \left\{ a = \sum_{i=1}^n n_i b_i : n_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}, a \in \Phi \right\},$$

so ist

$$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-.$$

Beweis : Wir betrachten zunächst die von B erzeugte Teilmenge von Ψ , das heißt, die Menge aller Wurzeln, die sich als ganzzahlige Linearkombinationen von Basiselementen schreiben lassen. Die Teilmenge Ψ wird durch alle Spiegelungen s_{b_i} an Wänden von C in sich überführt (ÜA), also ist sie nach Satz 4.14 iii) invariant unter der Operation der Weylgruppe $W(\Phi)$. Nun ist nach Proposition 4.17 jede indivisible Wurzel in Φ in Ψ enthalten. Da jede Wurzel in Φ entweder indivisible ist oder von der Form $2a$ für eine indivisible Wurzel, ist $\Psi = \Phi$. Jedes $a \in \Phi$ hat also eine Darstellung

$$a = \sum_{i=1}^n n_i b_i$$

mit $n_i \in \mathbb{Z}$.

Nun ist \bar{C} entweder in

$$\{x \in V : (a, x) \geq 0\}$$

oder in

$$\{x \in V : (a, x) \leq 0\}$$

enthalten. Indem wir eventuell a durch $-a$ ersetzen, können wir annehmen, dass

$$\bar{C} \subset \{x \in V : (a, x) \geq 0\}$$

ist.

Nach Satz 4.15 ist b_1, \dots, b_n eine Basis von V . Also ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ der lineare Unterraum

$$\{x : (b_j, x) = 0 \forall j \neq i\} = \bigcap_{j \neq i} \langle b_j \rangle^\perp$$

von V eindimensional und nicht in $\langle b_j \rangle^\perp$ enthalten. Daher existiert ein $x = x(i) \in V$ mit

$$(b_j, x) = 0 \quad \text{für alle } j \neq i$$

und

$$(b_i, x) > 0.$$

Dann ist $x \in \bar{C}$, so dass $(a, x) \geq 0$ gilt. Nun ist

$$(a, x) = n_i b_i(x),$$

also folgt $n_i \geq 0$. Daher ist $a \in \Phi^+$. □

5 Coxetermatrizen und ihre Klassifikation

Wir werden nun jedem irreduzierten und reduzierten Wurzelsystem Φ in V eine Coxetermatrix zuordnen. Mit Hilfe dieser Coxetermatrizen können wir Wurzelsysteme klassifizieren.

Dazu wählen wir eine Kammer C zu Φ mit zugehöriger Basis $B = B(C)$ wie in § 4. Wir nummerieren die Wurzeln in B als

$$a_1, \dots, a_n.$$

Nach Satz 4.15 ii) ist a_1, \dots, a_n eine Basis des Vektorraums V . Ferner haben wir im Beweis von Satz 4.15 gesehen, dass für $i \neq j$

$$(a_i, a_j) \leq 0$$

gilt.

Definition 5.1 Wir setzen für $i, j = 1, \dots, n$

$$m(i, j) = \text{ord}(s_{a_i} s_{a_j})$$

wobei s_{a_i} wie immer die Spiegelung an der Wand $H_{a_i} = \langle a_i \rangle^\perp$ bezeichnet und ord die Ordnung in der Weylgruppe ist. Die Matrix

$$M = (m(i, j))_{i, j=1, \dots, n}$$

heißt Coxetermatrix des Wurzelsystems Φ .

Es ist $m(i, i) = \text{ord}(s_{a_i} \circ s_{a_i}) = \text{ord}(1) = 1$, d.h. die Matrix M hat auf der Hauptdiagonalen nur Einsen. Wegen

$$(s_{a_i} s_{a_j})^{-1} = s_{a_j} s_{a_i}$$

ist sie symmetrisch. Nach Satz 2.3 ist ferner $m(i, j) \in \{2, 3, 4, 6\}$, denn a_i und a_j sind für $i \neq j$ nach Konstruktion niemals proportional. Daher erfüllt $M = (m(i, j))_{i, j}$ die Bedingungen der folgenden Definition.

Definition 5.2 Eine $n \times n$ -Matrix $M = (m_{ij})$ heißt Coxeter-Matrix, falls gilt

- i) M ist symmetrisch mit Einträgen in \mathbb{Z} .
- ii) $m_{ii} = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- iii) $m_{ij} \geq 2$ für alle $i \neq j$.

Für die Coxetermatrix $M = (m(i, j))_{i, j}$ zum Wurzelsystem Φ gilt ferner

$$m(i, j) = 2 \Leftrightarrow (a_i, a_j) = 0.$$

Allgemeiner schließen wir aus der Tabelle in Satz 2.3 zusammen mit $(a_i, a_j) \leq 0$ für $i \neq j$, dass nur folgende Fälle für $i \neq j$ möglich sind:

- i) $(a_i, a_j) = 0$ und $m(i, j) = 2$
- ii) $\|a_i\| = \|a_j\|$, $n(a_i, a_j) = -1$, $\angle(a_i, a_j) = \frac{2\pi}{3}$ und $m(i, j) = 3$
- iii) $\|a_j\| = \sqrt{2} \|a_i\|$, $n(a_i, a_j) = -1$, $\angle(a_i, a_j) = \frac{3\pi}{4}$ und $m(i, j) = 4$
- iv) $\|a_j\| = \sqrt{3} \|a_i\|$, $n(a_i, a_j) = -1$, $\angle(a_i, a_j) = \frac{5\pi}{6}$ und $m(i, j) = 6$.

Also schließen wir mit Lemma 1.4:

$$\begin{aligned} (a_i, a_j) &= \|a_i\| \|a_j\| \cos \angle(a_i, a_j) \\ &= \|a_i\| \|a_j\| \cos \left(\pi - \frac{\pi}{m(i, j)} \right) \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} n(a_i, a_j) &= 2 \frac{(a_i, a_j)}{(a_j, a_j)} = 2 \frac{\|a_i\|}{\|a_j\|} \cos \left(\pi - \frac{\pi}{m(i, j)} \right) \\ &= 2 \frac{\|a_i\|}{\|a_j\|} \left(-\cos \left(\frac{\pi}{m(i, j)} \right) \right) \\ &= -2 \frac{\|a_i\|}{\|a_j\|} \cos \frac{\pi}{m(i, j)} \end{aligned} \tag{1}$$

folgt.

Satz 5.3 *Es seien Φ_1 und Φ_2 irreduzierte und reduzierte Wurzelsysteme in V_1 bzw. V_2 . Falls es Basen $B^{(1)} = \{a_1, \dots, a_n\}$ von Φ_1 und $B^{(2)} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von Φ_2 gibt mit $n(a_i, a_j) = n(b_i, b_j)$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dann sind Φ_1 und Φ_2 isomorph.*

Beweis : Wir definieren einen linearen Isomorphismus

$$f : V_1 \rightarrow V_2$$

durch $f(a_i) = b_i$. Nach Voraussetzung ist

$$n(a_i, a_j) = n(b_i, b_j).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f \circ s_{a_i}(a_j) &= f(a_j - n(a_j, a_i)a_i) \\ &= b_j - n(b_j, b_i)b_i \\ &= s_{b_i}(b_j) = s_{b_i}(f(a_j)) \end{aligned}$$

Also ist $f \circ s_{a_i} = s_{b_i} \circ f$.

Es sei $a \in \Phi_1$ eine beliebige indivisible Wurzel. Nach Proposition 4.17 existiert ein $a_i \in B^{(1)}$ und ein $w \in W(\Phi_1)$ mit $a = w(a_i)$. Nach Satz 4.14 ist $w = s_{a_{i_1}} \circ \dots \circ s_{a_{i_k}}$ für $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} f(a) &= f \circ s_{a_{i_1}} \circ \dots \circ s_{a_{i_k}}(a_i) \\ &= s_{b_{i_1}} \circ \dots \circ s_{b_{i_k}}(f(a_i)) \\ &= s_{b_{i_1}} \circ \dots \circ s_{b_{i_k}}(b_i) \\ &\in \Phi_2. \end{aligned}$$

Da Φ_1 reduziert ist, folgt $f(\Phi_1) \subset \Phi_2$. Analog zeigt man durch Anwenden von Proposition 4.17 auf indivisible Wurzeln in Φ_2 , dass

$$f(\Phi_1) = \Phi_2$$

gilt.

Aus $n(a_i, a_j) = n(b_i, b_j)$ für $i \neq j$ folgt ferner

$$\frac{(a_i, a_i)}{(a_j, a_j)} = \frac{(b_i, b_i)}{(b_j, b_j)}.$$

Also ist $(a_i, a_j) = 0$ genau dann, wenn $(b_i, b_j) = 0$. Falls $(a_i, a_j) \neq 0$ ist, so folgt

$$\frac{(a_i, a_i)}{(a_j, a_j)} = \frac{(b_i, b_i)}{(b_j, b_j)}.$$

Nach Proposition 3.1 nimmt $\{(a_i, a_i) : i = 1, \dots, n\}$ höchstens zwei Werte an. Analog nimmt $\{(b_i, b_i) : i = 1, \dots, n\}$ höchstens zwei Werte an. Falls $\{(a_i, a_i) : i = 1, \dots, n\}$ nur einen Wert α_1 annimmt, so nimmt auch $\{(b_i, b_i) : i = 1, \dots, n\}$ nur einen Wert β_1 an (ÜA). Mit $c = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ gilt dann $(b_i, b_i) = c(a_i, a_i)$ für alle i .

Angenommen $\{(a_i, a_i) : i = 1 \dots n\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ und $\{(b_i, b_i) : i = 1, \dots, n\} = \{\beta_1, \beta_2\}$ für $\alpha_1 < \alpha_2$ und $\beta_1 < \beta_2$. Sei $(a_i, a_i) = \alpha_1$. Da Φ_1 irreduzibel ist, existiert ein a_j mit $(a_j, a_j) = \alpha_2$ und $(a_i, a_j) \neq 0$ (ÜA). Also folgt

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{(a_i, a_i)}{(a_j, a_j)} = \frac{(b_i, b_i)}{(b_j, b_j)},$$

woraus wegen $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1$ bereits $(b_i, b_i) = \beta_1$ und $(b_j, b_j) = \beta_2$ und damit $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} =: c$ folgt.

Also gilt $(b_i, b_i) = c(a_i, a_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ und damit für alle $i \neq j$:

$$\begin{aligned} (b_i, b_j) &= (b_j, b_j)n(b_i, b_j) \\ &= c(a_j, a_j)n(a_i, a_j) \\ &= c(a_i, a_j). \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $x, y \in V_1$:

$$(f(x), f(y)) = c(x, y).$$

Nach Definition 1.7 sind also Φ_1 und Φ_2 isomorph. □

Korollar 5.4 *Falls die irreduziblen und reduzierten Wurzelsysteme Φ_1 und Φ_2 dieselbe Coxetermatrix haben und falls in dieser nur die Einträge 1, 2 und 3 auftauchen, dann sind Φ_1 und Φ_2 isomorph.*

Beweis : Es sei $M = (m(i, j))_{i, j}$ die Coxetermatrix eines irreduziblen und reduzierten Wurzelsystems mit Basis a_1, \dots, a_n . Wir haben oben gesehen, dass gilt:

$$\begin{aligned} m(i, j) = 3 &\Leftrightarrow n(a_i, a_j) = -1 = n(a_j, a_i) \\ m(i, j) = 2 &\Leftrightarrow n(a_i, a_j) = 0. \end{aligned}$$

Somit folgt in diesem Fall in der Notation von Satz 5.3 aus der Gleichheit der Coxetermatrizen die Übereinstimmung der Matrizen

$$(n(a_i, a_j))_{i,j=1,\dots,n}$$

und

$$(n(b_i, b_j))_{i,j=1,\dots,n}$$

und damit folgt die Behauptung aus Satz 5.3. \square

Wir werden später sehen, dass auch in den anderen Fällen die Coxetermatrix im wesentlichen das Wurzelsystem bestimmt.

Definition 5.5 *Es sei $M = (m(i, j))_{i,j=1,\dots,n}$ eine Coxetermatrix zu einem irreduziblen und reduzierten Wurzelsystem Φ . Wir definieren eine Bilinearform B auf \mathbb{R}^n durch*

$$B(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m(i, j)},$$

wobei e_1, \dots, e_n die kanonische Basis bezeichnet.

Lemma 5.6 *In der Situation von Definition 5.5 gilt: B ist ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , d.h. B ist positiv definit.*

Beweis : Laut (1) gilt

$$\begin{aligned} B(e_i, e_j) &= -\cos \frac{\pi}{m(i, j)} = \frac{1}{2} \frac{\|a_j\|}{\|a_i\|} n(a_i, a_j) \\ &= \frac{(a_i, a_j)}{\|a_i\| \|a_j\|} = \left(\frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{a_j}{\|a_j\|} \right). \end{aligned}$$

Also folgt für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} B(x, x) &= \sum_{i,j} x_i x_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i x_j \left(\frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{a_j}{\|a_j\|} \right) \\ &= \left(\sum_i x_i \frac{a_i}{\|a_i\|}, \sum_i x_i \frac{a_i}{\|a_i\|} \right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

falls $\sum_{i=1}^n x_i \frac{a_i}{\|a_i\|} \neq 0$, da $(,)$ positiv definit ist. Nun ist $\sum_{i=1}^n x_i \frac{a_i}{\|a_i\|} = 0$ genau dann, wenn alle $x_i = 0$ sind. Daraus folgt die Behauptung. \square

Wir setzen in Zukunft

$$q_{ij} = B(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m(i, j)}.$$

Da $m(i, i) = 1$ und $m(i, j) \in \{2, 3, 4, 6\}$ für $i \neq j$ ist, gilt

$$q_{ii} = 1$$

und $q_{ij} \in \{-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, 0\}$.

$$\begin{aligned} \text{Dabei gilt } q_{ij} = 0 &\Leftrightarrow m(i, j) = \infty \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_j) = 0. \end{aligned}$$

Definition 5.7 Sei M eine Coxetermatrix in $\mathbb{Z}^{n \times n}$. Wir definieren den Coxetergraphen $\Gamma(M)$ zu M wie folgt: Γ hat n Ecken v_1, \dots, v_n . Dabei werden v_i und v_j genau dann durch eine Kante verbunden, wenn $m(i, j) \geq 3$ ist. Wir markieren in diesem Fall die Kante mit der Zahl $m(i, j)$.

Der Coxetergraph $\Gamma(M)$ ist also ein markierter Graph.

Lemma 5.8 Der Coxetergraph zu einer Coxetermatrix $M = (m(i, j))_{i, j}$ eines irreduziblen und reduzierten Wurzelsystems ist ein Baum, d.h. er ist zusammenhängend und zyklfrei.

Beweis : Wir zeigen zunächst, dass $\Gamma(M)$ keine Zyklen enthält. Wäre nämlich $(v_{i_1}, \dots, v_{i_s})$ ein Zykel minimaler Länge für eine Teilmenge $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_s}\} \subset B$, so würde

$$\begin{aligned} m(i_k, i_{k+1}) &\geq 3 \text{ für alle } k = 1, \dots, s-1 \\ \text{und } m(i_s, i_1) &\geq 3 \end{aligned}$$

gelten. In diesem Fall setzen wir

$$x = e_{i_1} + \dots + e_{i_s} \in \mathbb{R}^n$$

und berechnen

$$\begin{aligned} B(x, x) &= B(e_{i_1} + \dots + e_{i_s}, e_{i_1} + \dots + e_{i_s}) \\ &= s + 2 \sum_{\substack{k < l \\ s-1}} B(e_{i_k}, e_{i_l}) \\ &= s + 2 \sum_{k=1}^{s-1} B(e_{i_k}, e_{i_{k+1}}) + 2B(e_{i_1}, e_{i_s}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } B(e_{i_k}, e_{i_{k+1}}) &\leq -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \text{und } B(e_{i_1}, e_{i_s}) &\leq -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also folgt

$$\begin{aligned} B(x, x) &\leq s + 2(s-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= s - s = 0. \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.6 ist B positiv definit, also folgt $x = 0$. Das kann nicht sein, also existiert kein Zykel.

Jetzt zeigen wir, dass $\Gamma(M)$ zusammenhängend ist. Falls nicht, so existiert eine Zerlegung $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \perp B_2$ bezüglich des Skalarproduktes (\cdot, \cdot) auf V . Wir nehmen $B_1 \neq \emptyset$ an. Dann lassen die Spiegelungen s_b für $b \in B_2$ den von B_1 erzeugten Unterraum $\langle B_1 \rangle$ invariant. Somit ist $\langle B_1 \rangle \subset V$ ein Unterraum, der invariant unter der Weylgruppe ist. Da $\{wb : w \in W\}$ für $b \in B_1$ ein Erzeugendensystem von V ist (Übungen), folgt $\langle B_1 \rangle = V$, also $B_2 = \emptyset$. \square

Wir betrachten nun eine Coxetermatrix $M = (m_{ij})_{i, j} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) Der Coxetergraph $\Gamma(M)$ ist ein Baum

ii) Die symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^n , gegeben durch

$$B(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}},$$

ist positiv definit.

Nach Lemma 5.6 und Lemma 5.8 erfüllt etwa die Coxetermatrix zu einem irreduziblen und reduzierten Wurzelsystem diese Bedingungen.

Wir schreiben auch $q_{ij} = B(e_i, e_j)$. Es gilt $q_{ii} = B(e_i, e_i) = 1$.

Lemma 5.9 Für alle $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\sum_{j \neq i} q_{ij}^2 < 1.$$

Beweis : Es sei $J = \{j \neq i : q_{ij} \neq 0\}$. Da für $i \neq j$ gilt $q_{ij} = 0 \Leftrightarrow m_{ij} = 2 \Leftrightarrow v_i$ und v_j sind im Coxetergraph nicht durch eine Kante verbunden, enthält J genau die Nachbarn von v_i im Coxetergraphen. Falls $j \neq j'$ in J sind, so können daher v_j und $v_{j'}$ nicht benachbart sein, sonst entstünde ein Zykel. Also ist

$$q_{jj'} = 0.$$

Auf dem Unterraum $F = \sum_{j \in J} \mathbb{R}e_j$ von \mathbb{R}^n bilden die kanonischen Einheitsvektoren e_j daher eine Orthonormalbasis der positiv definiten Form B . Wir betrachten den Vektor

$$\sum_{j \in J} q_{ij} e_j \in F.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &< B(e_i - \sum_{j \in J} q_{ij} e_j, e_i - \sum_{j \in J} q_{ij} e_j) \\ &= B(e_i, e_i) - 2 \sum_{j \in J} q_{ij} B(e_i, e_j) + \sum_{j \in J} q_{ij}^2 B(e_j, e_j) \\ &= 1 - \sum_{j \in J} q_{ij}^2 \end{aligned}$$

also folgt in der Tat

$$\sum_{j \neq i} q_{ij}^2 = \sum_{j \in J} q_{ij}^2 < 1$$

□

Lemma 5.10 Jede Ecke im Coxetergraphen $\Gamma(M)$ gehört zu höchstens drei Kanten.

Beweis : Sei v_i eine Ecke im Coxetergraph, die auf h Kanten liegt, also h Nachbarn hat. Da $m_{ij} \geq 3$ ist für jeden Nachbarn v_j von v_i , folgt

$$q_{ij} = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} \leq -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

also ist

$$q_{ij}^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Daraus folgt mit Lemma 5.9

$$1 > \sum_{j \neq i} q_{ij}^2 \geq h \cdot \frac{1}{4},$$

also $h \leq 3$. □

Lemma 5.11 *Falls v_i zu drei Kanten gehört, so ist jede dieser Kanten mit 3 markiert. Mit anderen Worten: Hat v_i drei Nachbarn im Coxetergraphen, so gilt für jeden Nachbarn v_j :*

$$m_{ij} = 3.$$

Beweis : Falls für einen der drei Nachbarn $m_{ij} \geq 4$ wäre, so folgte

$$q_{ij}^2 = \left(\cos \frac{\pi}{m_{ij}} \right)^2 \geq \left(\cos \frac{\pi}{4} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

also wäre

$$\sum_{j \neq i} q_{ij}^2 \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1,$$

was im Widerspruch zu Lemma 5.9 steht. □

Lemma 5.12 *Falls es $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $m_{ij} = 6$ gibt, so folgt $n = 2$.*

Beweis : Angenommen, es gilt $m_{ij} = 6$ und $n > 2$. Da der Coxetergraph $\Gamma(M)$ zusammenhängend ist, hat v_i oder v_j einen weiteren Nachbarn. Nach Vertauschen von i und j können wir annehmen, dass v_i noch einen Nachbarn v_k mit $k \neq j$ hat. Dann ist also $m_{ik} \geq 3$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{l \neq i} q_{il}^2 &\geq q_{ij}^2 + q_{ik}^2 \\ &\geq \left(\cos \frac{\pi}{6} \right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{3} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^2 \\ &= \frac{3+2}{4} \geq 1, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu Lemma 5.9 steht. □

Lemma 5.13 *Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt es höchstens ein $j \neq i$ mit $m_{ij} \geq 4$. Jede Ecke in $\Gamma(M)$ liegt also höchstens in einer Kante, die mit einer Zahl ≥ 4 markiert ist.*

Beweis : Falls es $j \neq k$ gibt mit $m_{ij} \geq 4$ und $m_{ik} \geq 4$, so folgte

$$\begin{aligned} \sum_{l \neq i} q_{il}^2 &\geq q_{ij}^2 + q_{ik}^2 \\ &\geq 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^2 = 1, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu Lemma 5.9 steht. □

Jetzt konstruieren wir aus einem Coxetergraph $\Gamma(M)$ einen neuen Coxetergraphen $\Gamma(M')$ durch „Streichen einer Kante“. Dazu seien v_k und v_l in $\Gamma(M)$ durch eine Kante verbunden, d.h. $m_{kl} \geq 3$.

Sei $I' = \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}$. Wir definieren die Matrix $M' = (m'_{ij})_{ij \in I'}$, deren Zeilen und Spalten durch I' nummeriert werden, wie folgt:

$$m'_{kk} = 2$$

$$m'_{ij} = m_{ij}, \text{ falls } i, j \neq k.$$

$$m'_{ki} = m'_{ik} = \begin{cases} m_{li} & , \text{ falls } v_l \text{ benachbart zu } v_i \text{ ist.} \\ m_{ki} & , \text{ falls } v_k \text{ benachbart zu } v_i \text{ ist.} \\ 2 & , \text{ falls weder } v_l \text{ noch } v_k \text{ zu } v_i \text{ benachbart sind.} \end{cases}$$

Die ersten beiden Alternativen können nicht gleichzeitig eintreten, da $\Gamma(M)$ ein Baum ist.

Proposition 5.14 *Falls $m_{kl} = 3$ ist, so ist M' eine Coxetermatrix, die unseren Bedingungen genügt, d.h. es gilt*

i) $\Gamma(M')$ ist ein Baum

ii) $B'(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m'_{ij}}$ ist eine positiv definite Form auf $\bigoplus_{i \in I'} \mathbb{R}e_i$.

Beweis : Der Coxetergraph $\Gamma(M')$ entsteht aus $\Gamma(M)$, indem man die Kante, die v_i und v_j verbindet, durch eine Ecke ersetzt. $\Gamma(M')$ ist daher auch ein Baum.

Aus $m_{kl} = 3$ folgt $q_{kl} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Wir setzen $q'_{ij} = B'(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m'_{ij}}$. Dann gilt

$$q'_{ij} = q_{ij}, \text{ falls } i, j \neq k$$

und

$$q'_{ik} = q'_{ki} = \begin{cases} q_{li} & , \text{ falls } v_l \text{ benachbart zu } v_i \\ q_{ki} & , \text{ falls } v_k \text{ benachbart zu } v_i \\ 0 & , \text{ falls weder } v_l \text{ noch } v_k \text{ zu } v_i \text{ benachbart sind.} \end{cases}$$

Also ist $q'_{ik} = q'_{ki} = q_{li} + q_{ki}$, denn höchstens eine dieser Zahlen ist ungleich Null.

Für einen beliebigen Vektor $\sum_{i \neq l} c_i e_i \in \bigoplus_{i \in I'} \mathbb{R}e_i$ gilt also

$$\begin{aligned} & B'(\sum_{i \neq l} c_i e_i, \sum_{i \neq l} c_i e_i) \\ &= \sum_{i, j \neq l} c_i c_j B'(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i, j \neq l, k} c_i c_j q_{ij} + \sum_{i \neq l, k} c_i c_k q'_{ik} + \sum_{j \neq l, k} c_k c_j q'_{kj} + c_k^2 \\ &= \sum_{i, j \neq l, k} c_i c_j q_{ij} + 2 \sum_{i \neq l, k} c_i c_k (q_{li} + q_{ki}) + c_k^2 \\ &= B(\sum_{i \neq l} c_i e_i, \sum_{i \neq l} c_i e_i) + 2 \sum_{i \neq l, k} c_i c_k q_{li} \quad (2) \end{aligned}$$

Setzen wir $c_l = -2 \sum_{i \neq l, k} c_i q_{li}$, so gilt

$$\begin{aligned}
 0 &< B\left(\sum_{i=1}^n c_i e_i, \sum_{i=1}^n c_i e_i\right) \\
 &= B\left(\sum_{i \neq l} c_i e_i, \sum_{i \neq l} c_i e_i\right) + 2c_l \sum_{i \neq l} c_i q_{il} + c_l^2 \\
 &= B\left(\sum_{i \neq l} c_i e_i, \sum_{i \neq l} c_i e_i\right) + 2c_l c_k q_{kl} + 2c_l \sum_{i \neq k, l} c_i q_{il} + c_l^2 \\
 &= B\left(\sum_{i \neq l} c_i e_i, \sum_{i \neq l} c_i e_i\right) - c_l c_k - c_l^2 + c_l^2, \text{ da } q_{kl} = -\frac{1}{2} \\
 &= B\left(\sum_{i \neq l} c_i e_i, \sum_{i \neq l} c_i e_i\right) + 2 \sum_{i \neq l, k} c_i c_k q_{li} \\
 &= B'\left(\sum_{i \neq l} c_i e_i, \sum_{i \neq l} c_i e_i\right) \text{ wegen (2)}.
 \end{aligned}$$

Also ist B' ebenfalls positiv definit. □

Jetzt können wir einen für die Klassifikation grundlegenden Satz beweisen.

Satz 5.15 *Eine Coxetermatrix M , deren Coxetergraph $\Gamma(M)$ ein Baum ist, so dass die Form B positiv definit ist, genügt genau einer der folgenden Bedingungen:*

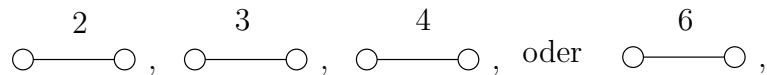
1. $\Gamma(M)$ enthält genau eine Ecke mit drei Nachbarn und alle Kantenmarkierungen sind $m_{ij} = 3$.
2. $\Gamma(M)$ ist eine Kette, also ein Graph der Form



und es gibt höchstens eine Kante mit der Markierung $m_{ij} \geq 4$.

Beweis : (mit Induktion nach n)

Für $n = 2$ ist $\Gamma(M)$ ein Graph der Form

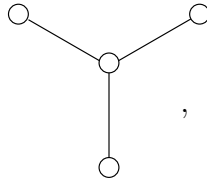


fällt also unter Fall 1).

Wir nehmen an, die Behauptung stimmt für Coxetergruppen mit $< n$ Ecken und betrachten $n \geq 3$.

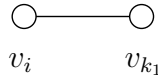
1. Fall: $\Gamma(M)$ enthält eine Ecke v_i mit mindestens drei Nachbarn. Nach Lemma 5.9 hat v_i dann genau drei Nachbarn $v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}$.

Falls $\Gamma(M)$ nur diese vier Ecken enthält, so ist $\Gamma(M)$ von der Form



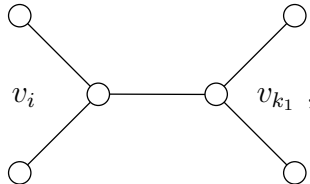
und nach Lemma 5.10 ist jede Kantenmarkierung 3. Also tritt Fall 1) ein.

Falls $\Gamma(M)$ noch eine weitere Ecke enthält, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass v_{k_1} eine Nachbarecke $v_j \neq v_i$ hat. In diesem Fall betrachten wir die Coxetermatrix M' , die durch Kollabieren der Kante



entsteht.

$\Gamma(M')$ hat dann $(n - 1)$ Ecken, darunter weiterhin die Ecke v_i mit drei Nachbarn. Nach Induktionsvoraussetzung muss also Fall 1) auf $\Gamma(M')$ zutreffen, d.h. $\Gamma(M')$ enthält keine weiteren Ecken mit drei Nachbarn, und alle Kantenmarkierungen sind 3. Mit Lemma 5.10 folgt, dass auch alle Kantenmarkierungen in $\Gamma(M)$ gleich 3 sind. Ferner sind höchstens bei v_i und v_{k_1} drei Nachbarn möglich. Hätte v_{k_1} drei Nachbarn, also



so hätte allerdings $\Gamma(M')$ eine Ecke mit vier Nachbarn, im Widerspruch zu Lemma 5.10. Also fällt auch $\Gamma(M)$ unter Fall 1).

2. Fall: $\Gamma(M)$ enthält keine Ecke mit mehr als zwei Nachbarn. Da $\Gamma(M)$ ein Baum ist, ist dieser Graph eine Kette



Angenommen, eine Kante ist mit $m(i, j) \geq 4$ markiert. Da $n \geq 3$ ist, hat diese Kante eine Nachbarkante. Ohne Einschränkung können wir annehmen, diese Kante mündet in v_i . Dann existiert ein $k \neq i, j$ mit $m(i, k) \geq 3$.

Nach Lemma 5.13 folgt $m(i, k) = 3$. Wir kollabieren die Kante zwischen v_i und v_k und wenden die Induktionsvoraussetzung auf die Coxetermatrix M' an. Diese enthält keine Ecken mit mehr als zwei Nachbarn, also tritt Fall 2) ein. $\Gamma(M')$ enthält also höchstens eine Kante, die mit einer Zahl ≥ 4 markiert ist. Nun ist aber die Kante zwischen v_i und v_j in $\Gamma(M')$ bereits mit $m(i, j) \geq 4$ markiert, also fällt $\Gamma(M)$ unter Fall 2). \square

Wegen Lemma 5.12 wissen wir außerdem, dass im Fall 2) für $n \geq 3$ die einzige Kantenmarkierung ≥ 3 gleich 4 sein muss.

Jetzt wollen wir noch bestimmen, wo die einzige mit einer Zahl ≥ 4 markierte Kante im Fall 2) aus Satz 5.15 liegen kann.

Lemma 5.16 *Angenommen $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ bilden einen Weg in $\Gamma(M)$, so dass alle Kanten mit 3 markiert sind, d.h. es ist*

$$m(i_j, i_{j+1}) = 3 \text{ für } j = 1, \dots, p - 1.$$

Dann gilt

$$B\left(\sum_{k=1}^p ke_{i_k}, \sum_{k=1}^p ke_{i_k}\right) = \frac{1}{2}p(p+1).$$

Beweis : Nach Voraussetzung gilt

$$B(e_{i_j}, e_{i_{j+1}}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

und

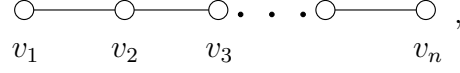
$$B(e_{i_k}, e_{i_l}) = 0 \text{ falls } |l - k| > 1.$$

Also können wir berechnen

$$\begin{aligned} B\left(\sum_{k=1}^p ke_{i_k}, \sum_{k=1}^p ke_{i_k}\right) &= \sum_{k=1}^p k^2 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} k(k+1) \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^p k^2 - \sum_{k=1}^{p-1} k^2 - \sum_{k=1}^{p-1} k \\ &= p^2 - \frac{(p-1)p}{2} \\ &= p^2 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p \\ &= \frac{1}{2}p(p+1) \end{aligned}$$

\square

Lemma 5.17 *Wir nehmen an, dass $n \geq 3$ ist und dass $\Gamma(M)$ ein Coxetergraph vom Typ 2) aus Satz 5.15 ist, d.h. $\Gamma(M)$ ist eine Kette der Form*

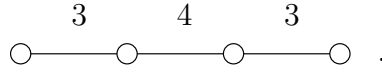


so dass höchstens eine Kantenmarkierung gleich 4 ist.

Falls die Kantenmarkierung 4 in der Mitte liegt, falls also

$$m(i, i+1) = 4$$

für ein $2 \leq i \leq n-2$ gilt, dann ist $\Gamma(M)$ der markierte Graph



Beweis : Es sei $m(i, i+1) = 4$ für $2 \leq i \leq n-2$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} x &= e_1 + 2e_2 + \dots + ie_i \\ y &= e_n + 2e_{n-1} + \dots + (n-i)e_{i+1}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.16 gilt

$$B(x, x) = \frac{1}{2}i(i+1)$$

und

$$B(y, y) = \frac{1}{2}(n-i)(n-i+1).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} B(x, y) &= i(n-i)B(e_i, e_{i+1}) \\ &= i(n-i)(-\cos \frac{\pi}{4}) \\ &= -i(n-i)\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Da B eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^n ist, folgt aus Lemma 1.4:

$$B(x, y)^2 < B(x, x)B(y, y),$$

also

$$i^2(n-i)^2 \frac{1}{2} < \frac{1}{4}i(i+1)(n-i)(n-i+1).$$

Daraus folgt

$$2i(n-i) < (i+1)(n-i+1) = i(n-i) + i + (n-i) + 1,$$

also

$$(i-1)(n-i-1) = i(n-i) - i - (n-i) + 1 < 2,$$

woraus wegen $2 \leq i, (n-i) \leq n-2$

$$i-1 = n-i-1 = 1,$$

also $i = 2$ und $n = 4$ folgt. □

Jetzt wollen wir noch bestimmen, wo der einzige Verzweigungspunkt für Coxetergraphen vom Typ 1) aus Satz 5.15 liegen kann.

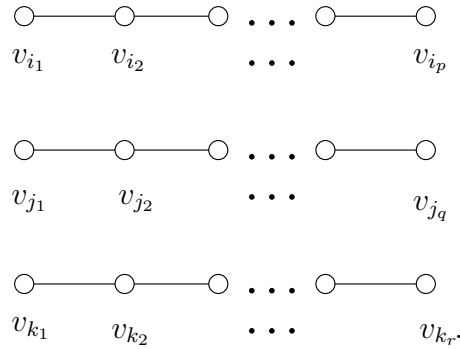
Lemma 5.18 Falls $\Gamma(M)$ ein Coxetergraph vom Typ 1) aus Satz 5.15 ist, so dass v_i die Ecke mit drei Nachbarn ist, dann ist der Untergraph

$$\Gamma(M) \setminus \{v_i\}$$

(ohne die Kanten in v_i) die Vereinigung von drei Ketten mit jeweils $(p-1)$, $(q-1)$ und $(r-1)$ Kanten, so dass bis auf Permutation (p, q, r) eines der folgenden Tripel ist:

$$\begin{aligned} &(1, 2, 2) \\ &(1, 2, 3) \\ &(1, 2, 4) \\ &(1, 1, m) \quad \text{für ein } m \geq 1. \end{aligned}$$

Beweis : Da v_i die einzige Ecke ist, die drei Nachbarn hat, ist $\Gamma(M) \setminus \{v_i\}$ die Vereinigung von drei Ketten. Nach Satz 5.15 sind alle Kantenmarkierungen gleich 3. Wir bezeichnen mit p, q und r die Anzahl der Ecken in den drei Ketten und bezeichnen diese folgendermaßen:



Dabei seien v_{i_1}, v_{j_1} und v_{k_1} die Nachbarn von v_i . Wir können annehmen, dass $p \geq q \geq r$ gilt. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} x &= e_{i_p} + 2e_{i_{p-1}} + \dots + pe_{i_1} \\ y &= e_{j_q} + 2e_{j_{q-1}} + \dots + qe_{j_1} \\ z &= e_{k_r} + 2e_{k_{r-1}} + \dots + re_{k_1}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 5.16 folgt

$$B(x, x) = \frac{1}{2}p(p+1), \quad B(y, y) = \frac{1}{2}q(q+1) \quad \text{und} \quad B(z, z) = \frac{1}{2}r(r+1).$$

Außerdem gilt

$$B(e_i, x) = pB(e_i, e_{i_1}) = -\frac{1}{2}p, \quad \text{denn } m(i, i_1) = 3.$$

Analog ist

$$B(e_i, y) = -\frac{1}{2}q \quad \text{und} \quad B(e_i, z) = -\frac{1}{2}r.$$

Die Vektoren x, y, z sind nach Konstruktion paarweise orthogonal.

Wir setzen $\alpha = \sqrt{B(x, x)}$, $\beta = \sqrt{B(y, y)}$ und $\gamma = \sqrt{B(z, z)}$. Da e_i nicht in dem von x, y und z erzeugten Unterraum liegt, folgt

$$\begin{aligned}
0 &< B\left(e_i - \frac{1}{\alpha^2}B(e_i, x)x - \frac{1}{\beta^2}B(e_i, y)y - \frac{1}{\gamma^2}B(e_i, z)z\right), \\
&e_i - \frac{1}{\alpha^2}B(e_i, x)x - \frac{1}{\beta^2}B(e_i, y)y - \frac{1}{\gamma^2}B(e_i, z)z \\
&= 1 - \frac{2}{\alpha^2}B(e_i, x)^2 - \frac{2}{\beta^2}B(e_i, y)^2 - \frac{2}{\gamma^2}B(e_i, z)^2 \\
&\quad + \frac{B(e_i, x)^2}{\alpha^2} \frac{B(x, x)}{\alpha^2} + \frac{B(e_i, y)^2}{\beta^2} \frac{B(y, y)}{\beta^2} + \frac{B(e_i, z)^2}{\gamma^2} \frac{B(z, z)}{\gamma^2} \\
&= 1 - \frac{B(e_i, x)^2}{B(x, x)} - \frac{B(e_i, y)^2}{B(y, y)} - \frac{B(e_i, z)^2}{B(z, z)} \\
&= 1 - \frac{\frac{1}{4}p^2}{\frac{1}{2}p(p+1)} - \frac{\frac{1}{4}q^2}{\frac{1}{2}q(q+1)} - \frac{\frac{1}{4}r^2}{\frac{1}{2}r(r+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} \frac{q}{q+1} - \frac{1}{2} \frac{r}{r+1} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{r+1} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} \right), \\
\text{also } &\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1
\end{aligned}$$

Da $p \geq q \geq r$ ist, folgt $\frac{3}{r+1} > 1$, also $r+1 < 3$ und somit $r = 1$. Dann ist also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{2} > 1, \\
\text{d.h. } &\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

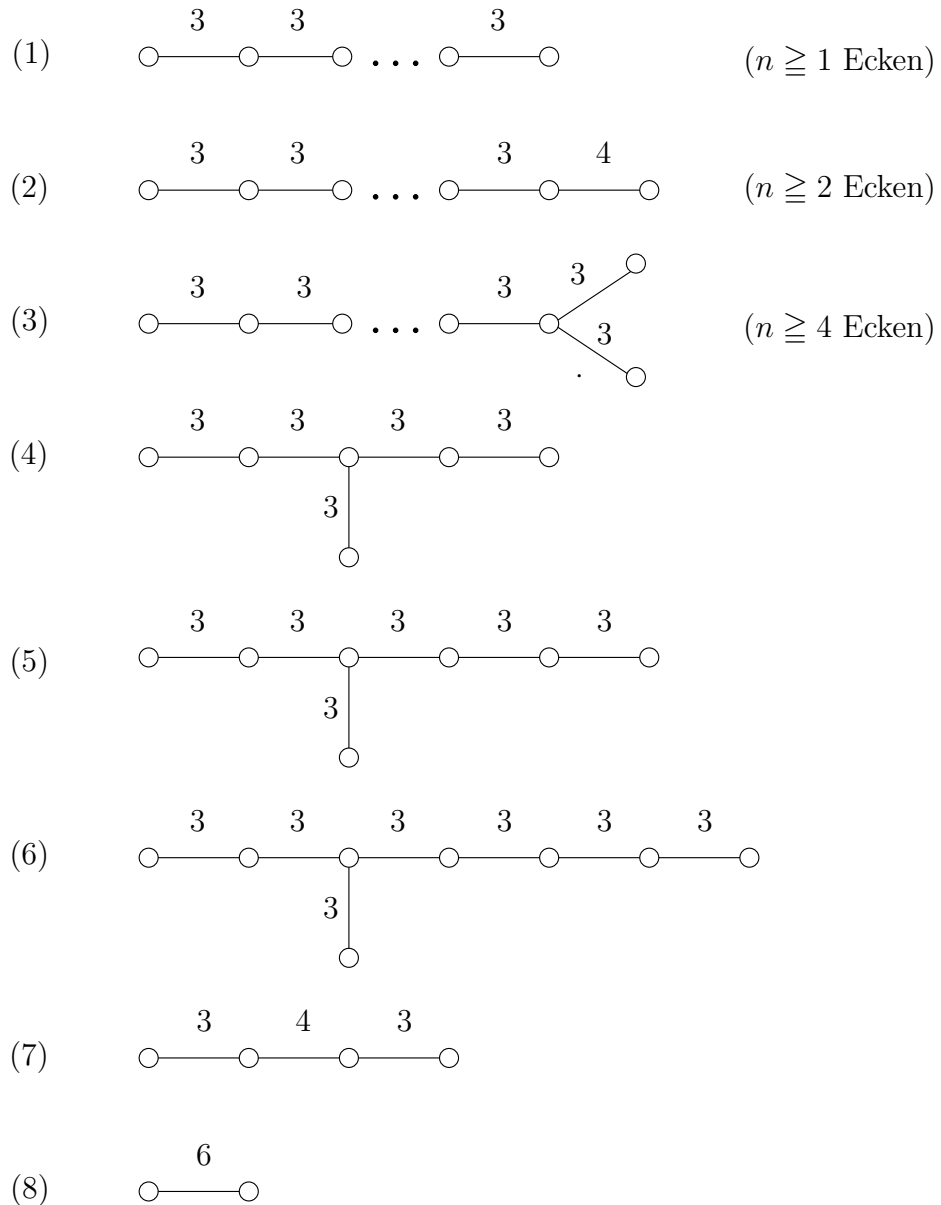
woraus $2 \frac{1}{q+1} > \frac{1}{2}$, also $q+1 < 4$ und daher $1 \leq q \leq 2$ folgt. Ist $q = 2$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{3},$$

also $\frac{1}{p+1} > \frac{1}{6}$ und daher $p \leq 4$.

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 5.19 *Der Coxetergraph $\Gamma(M)$ zu einem irreduziblen und reduzierten Wurzelsystem ist isomorph (als markierter Graph) zu genau einem der folgenden Graphen:*



Beweis : Nach Satz 5.15 enthält $\Gamma(M)$ entweder genau eine Ecke mit drei Nachbarn oder ist eine Kette. Im ersten Fall sind alle Kantenmarkierungen gleich drei und $\Gamma(M)$ ist nach Lemma 5.18 einer der Graphen (4), (5), (6) oder (3). Im zweiten Fall existiert höchstens eine Kantenmarkierung ≥ 4 . Ist diese gleich 6, so liegt nach Lemma 5.12 der Graph (8) vor. Ist sie gleich 4, so tritt nach Lemma 5.17 einer der Fälle (2) oder (7) ein. Sind alle Kantenmarkierungen gleich drei, so tritt Fall (1) ein. \square

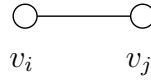
6 Klassifikation von Wurzelsystemen

Um Wurzelsysteme abschließend zu klassifizieren, brauchen wir das sogenannte Dynkendiagramm.

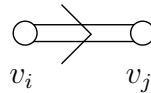
Definition 6.1 Sei Φ ein irreduzibles und reduziertes Wurzelsystem in V und a_1, \dots, a_n eine Basis von Φ .

Das Dynkindiagramm von Φ besteht aus n Ecken v_1, \dots, v_n und verschiedenen Typen von Verbindungslinien, die folgendermaßen definiert sind:

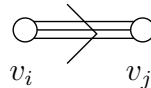
1. Ist $(a_i, a_j) = 0$, so sind v_i und v_j nicht verbunden.
2. Ist $n(a_i, a_j) = -1 = n(a_j, a_i)$, so sind v_i und v_j durch eine einfache Kante verbunden:



3. Ist $n(a_i, a_j) = -2$ und $n(a_j, a_i) = -1$, so sind v_i und v_j durch eine gerichtete doppelte Kante verbunden:



4. Ist $n(a_i, a_j) = -3$ und $n(a_j, a_i) = -1$, so sind v_i und v_j durch eine gerichtete dreifache Kante verbunden:



Nach Satz 2.3 sind dies die einzigen Möglichkeiten, da zwei verschiedene Wurzeln aus einer Basis nicht proportional sein können und für $i \neq j$ immer $(a_i, a_j) \leq 0$ gilt.

Im Fall $n(a_i, a_j) = -2$ und $n(a_j, a_i) = -1$ folgt $2 \frac{(a_i, a_j)}{(a_j, a_j)} = -2$ und $2 \frac{(a_j, a_i)}{(a_i, a_i)} = -1$, also $(a_i, a_i) = -2(a_i, a_j) = 2(a_j, a_j)$. Der Pfeil im Dynkindiagramm geht also von der längeren zur kürzeren Wurzel. Dies gilt analog für $n(a_i, a_j) = -3$ und $n(a_j, a_i) = -1$.

Proposition 6.2 Sind Φ_1 und Φ_2 irreduzible und reduzierte Wurzelsysteme in V_1 und V_2 , so dass es einen Isomorphismus der zugehörigen Dynkindiagramme gibt, dann sind Φ_1 und Φ_2 als Wurzelsysteme isomorph.

Ein Isomorphismus von Dynkindiagrammen ist hier eine Bijektion zwischen den Eckenmengen, die den Verbindungstyp der Ecken nach Definition 6.1 erhält.

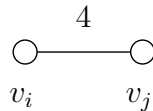
Beweis : Sind die Dynkindiagramme von Φ_1 und Φ_2 isomorph, so existiert eine Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ von Φ_1 und eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von Φ_2 mit

$$n(a_i, a_j) = n(b_i, b_j)$$

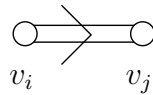
für alle $i, j = 1, \dots, n$. Nach Satz 5.3 sind Φ_1 und Φ_2 also isomorph. □

Nun ist $n(a_i, a_j) = n(a_j, a_i) = -1$ genau dann, wenn $m(i, j) = 3$ ist (siehe Satz 2.3). Also entspricht eine einfache Kante im Dynkindiagramm einer mit 3 markierten Kante im Coxetergraphen. Ferner sind zwei Ecken genau dann durch eine markierte Kante im Coxetergraphen verbunden, wenn sie im Dynkindiagramm verbunden sind.

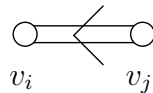
Außerdem entsprechen die Fälle $n(a_i, a_j) = -2$ und $n(a_j, a_i) = -1$ sowie $n(a_i, a_j) = -1$ und $n(a_j, a_i) = -2$ genau dem Fall $m(i, j) = 4$. Die Fälle $n(a_i, a_j) = -3$ und $n(a_j, a_i) = -1$ sowie $n(a_j, a_i) = -1$ und $n(a_j, a_i) = -3$ entsprechen genau dem Fall, dass $m(i, j) = 6$ ist. Also entspricht eine Kante der Form



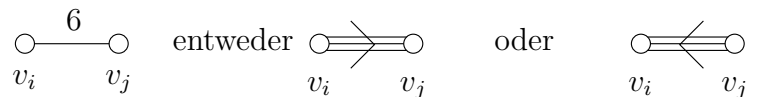
im Coxetergraphen entweder der Verbindung




oder der Verbindung





im Dynkindiagramm. Analog entspricht

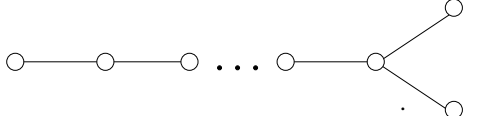


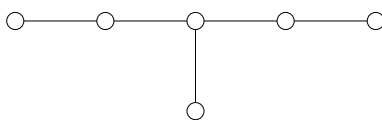
Satz 6.3 Für jedes irreduzible und reduzierte Wurzelsystem Φ ist das Dynkindiagramm isomorph zu genau einem der folgenden Diagramme:

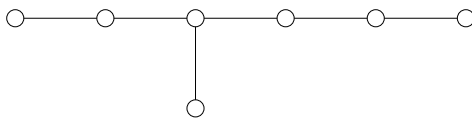
A_n  ($n \geq 1$ Ecken)

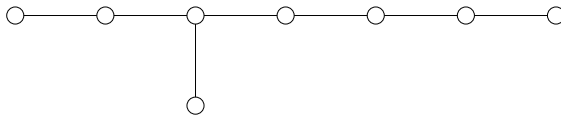
B_n  ($n \geq 2$ Ecken)

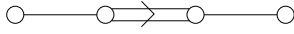
C_n  ($n \geq 3$ Ecken)

D_n  ($n \geq 4$ Ecken)

E_6 

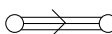
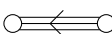
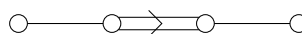
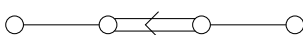
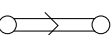
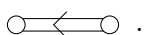
E_7 

E_8 

F_4 

G_2 

Beweis : Aus der obigen Diskussion in Verbindung mit Satz 5.19 folgt, dass die angegebenen Dynkindiagramme bis auf Isomorphie die einzig möglichen sind.

(Es ist nämlich  isomorph zu  und  isomorph zu  sowie  isomorph zu  .)

Man sieht ferner leicht, dass zwei verschiedene Dynkindiagramme in der Liste nicht isomorph zueinander sein können. □

Satz 6.4 *Bis auf Isomorphie gibt es nur die folgenden irreduziblen und reduzierten Wurzelsysteme:*

Typ A_n für $n \geq 1$
 Typ B_n für $n \geq 2$
 Typ C_n für $n \geq 3$
 Typ D_n für $n \geq 4$
 Typ E_6
 Typ E_7
 Typ E_8
 Typ F_4
 Typ G_2 .

Sie haben jeweils das entsprechende Dynkindiagramm.

Beweis : In den Übungen haben wir für fast jeden Typ von Dynkindiagramm schon ein passendes Wurzelsystem kennengelernt. Daher folgt die Behauptung aus Proposition 6.2. Es fehlt noch der Typ E_7 , der durch das Wurzelsystem

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\} \\
 &\cup \left\{ \frac{1}{2}(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{\nu(i)} e_i) : \sum_{i=1}^6 \nu(i) \text{ ungerade} \right\} \\
 \text{in } V &= \{(x_1 \dots x_8) \in \mathbb{R}^8 : x_7 = -x_8\}
 \end{aligned}$$

repräsentiert wird, und der Typ E_8 , der durch das Wurzelsystem

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 8\} \\
 &\cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{\nu(i)} e_i : \sum_{i=1}^8 \nu(i) \text{ gerade} \right\}
 \end{aligned}$$

in $V = \mathbb{R}^8$ repräsentiert wird. □