Skript zur Vorlesung

Tropische Geometrie

Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Kombinatorische Grundlagen 4

3 Ebene Kurven 9

4 Bewertungen 16

5 Algebraische Geometrie 21

6 Tropikalisierung von Hyperflächen 39

7 Der Gröbnerkomplex 52

8 Tropische Basen 60

9 Tropikalisierung von Nullstellenmengen 64

1 Einleitung

Die tropische Geometrie ist ein spannendes, recht junges Arbeitsgebiet an der Schnittstelle von Algebra und Kombinatorik.

Wir beginnen mit etwas tropischer Arithmetik.

Definition 1.1 *Wir definieren den **tropischen Semiring** als das Tupel*

$$(\mathbb{R}_\infty, \oplus, \odot),$$

wobei $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *ist und die tropische Addition* $\oplus$ *und die tropische Multiplikation* $\odot$ *wie folgt definiert sind:*

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \min\{x, y\} \\ x \odot y &= x + y. \end{aligned}$$

Hier setzen wir $\min\{a, \infty\} = a$ und $a + \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}_\infty$.

Lemma 1.2 *i) Die tropische Addition* $\oplus$ *und die tropische Multiplikation* $\odot$ *sind kommutativ.*

ii) Sie erfüllen das Distributivgesetz

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_\infty$*, wobei auch in der tropischen Welt „Punktrechnung vor Strichrechnung“ gilt.*

iii) ∞ *ist ein neutrales Element für* $\oplus$*,* 0 *ist ein neutrales Element für* $\odot$*.*

iv) $(\mathbb{R}, \odot, 0)$ *ist eine kommutative abelsche Gruppe.*

Beweis : Übungsaufgabe. □

Wir definieren wie üblich induktiv

$$x^{\textcircled{n}} = \underbrace{x \odot \ldots \odot x}_{n-\text{mal}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

sowie $x^{\textcircled{0}} = 0$ und $x^{\textcircled{-n}} = -x^{\textcircled{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Arithmetik im tropischen Semiring hat einige ungewohnte Eigenschaften:

Lemma 1.3 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die tropische binomische Formel*

$$x, y \in \mathbb{R}_{\geqq 0}:$$

$$(x \oplus y)^{ⓝ} = x^{ⓝ} \oplus y^{ⓝ}.$$

Beweis : Übungsaufgabe. □

Wir können nun mit den tropischen Rechenoperationen Polynome betrachten.

Definition 1.4 *Ein **tropisches Polynom** ist eine tropische Summe der Form*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{I \subset \mathbb{N}^n} a_I x^{Ⓘ},$$

wobei alle $a_I \in \mathbb{R}_\infty$ liegen und fast alle $a_I = \infty$ sind.

In Multiindexschreibweise ist $x^{Ⓘ}$ definiert als $x^{ⓘ_1} \odot \ldots \odot x_n^{ⓘ_n}$.

Ein tropisches Polynom der Form

$$a_I x^{Ⓘ}$$

nennen wir **tropisches Monom**.

Schreiben wir die tropischen Rechenoperationen aus, so ist ein tropisches Monom

$$a_I x^{Ⓘ} = a_I + i_1 x_1 + \ldots + i_n x_n$$

einfach eine affin-lineare Funktion mit ganzen Koeffizienten in $x_1, \ldots, x_n$. Falls $a_I = \infty$ ist, so ist auch $a_I x^{Ⓘ} = \infty$.

Ein tropisches Polynom ist von der Form

$$\begin{aligned} p(x_1, \ldots, x_n) &= \min_{I \subset \mathbb{N}^n} \{a_I + i_1 x_1 + \ldots + i_n x_n\} \\ &= \min_{\substack{I \subset \mathbb{N}^n \\ a_I \neq \infty}} \{a_I + i_1 x_1 + \ldots + i_n x_n\}, \end{aligned}$$

also das Minimum über endlich viele affin-lineare Funktionen mit ganzen Koeffizienten in $x_1, \ldots, x_n$.

Analog definieren wir Laurentpolynome

$$p(x) = \sum_{I \subset \mathbb{Z}^n} a_I x^{Ⓘ}.$$

(Führen Sie das aus!)

Lemma 1.5 *Es sei $p(x_1, \ldots, x_n)$ ein tropisches Laurentpolynom mit $p \neq \infty$. Dann hat die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (t_1, \ldots, t_n) & \mapsto & p(t_1, \ldots, t_n) \end{array}$$

folgende Eigenschaften:

i) *p ist stetig*

ii) *p ist stückweise affin-linear mit endlich vielen Stücken*

iii) *p ist konkav, das heißt, für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$p\Big(\frac{1}{2}(x+y)\Big) \geqq \frac{1}{2}\Big(p(x) + p(y)\Big).$$

Beweis : Übungsaufgabe. □

Ist $p(x)$ ein tropisches Polynom in einer Variablen, so ist $p(x)$ von der Form

$$p(x) = \min_{i=1,\ldots,n} \{a_i + ix\}$$

Der Graph der Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dann stückweise linear mit endlich vielen „Knickstellen“, an denen p nicht differenzierbar ist.

Diese endlich vielen Werte, an denen p nicht differenzierbar ist, nennen wir die **tropischen Nullstellen** von p.

Als einfaches Beispiel betrachten wir ein quadratisches tropisches Polynom

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & ax^{②} \oplus bx \oplus c \\ & = & \min\{a + 2x, b + x, c\}. \end{array}$$

Zeichnen Sie den Graphen!

Allgemeiner definieren wir „Nullstellenmengen“ von tropischen Polynomen wie folgt:

Definition 1.6 *Es sei $p(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{I \subset \mathbb{Z}^n} a_I x^{Ⓘ}$ ein tropisches Laurentpolynom. Dann definieren wir die zugehörige **tropische Hyperfläche** als*

> $V(p) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$ *In x wird $\min_I\{a_I + i_1x_1 + \ldots + i_nx_n\}$ für mindestens zwei verschiedene tropische Monome angenommen*$\} = \{x \in \mathbb{R}^n :$ *Die Funktion $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist nicht affin-linear in einer Umgebung von x*$\}$.

Das ist eine Verallgemeinerung der tropischen Nullstellenmenge eines Polynoms in einer Variablen. Wir werden später sehen, dass die tropischen Hyperflächen „kombinatorische Schatten“ echter Nullstellenmengen von Polynomen sind.

2 Kombinatorische Grundlagen

Definition 2.1 *Eine Teilmenge $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in X$ und alle $\lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in X.$$

Mit anderen Worten: Eine konvexe Teilmenge enthält mit je zwei Punkten auch die Strecke zwischen diesen Punkten.

Der Schnitt zweier konvexer Mengen ist konvex. Die **konvexe Hülle** convex (X) einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert als die kleinste konvexe Menge, die X enthält.

Wichtige Beispiele für konvexe Mengen sind Polyeder.

Definition 2.2 *Ein **Polyeder** ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ von der Form*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n :< c_i, x > \ \leqq \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots, d\}$$

für Vektoren $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$.

Ein Polyeder ist also die Lösungsmenge endlich vieler linearer Ungleichungen.

Wir können die $c_1, \ldots, c_d$ als Zeilen einer $d \times n$-Matrix A auffassen und $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ schreiben, dann gilt

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqq \alpha\}.$$

Polyeder sind konvex (Übungsaufgabe). Ein beschränkter Polyeder heißt **Polytop**.

Beispiele für Polyeder sind etwa Halbräume, die platonischen Körper, beliebig-dimensionale Würfel — finden Sie weitere!

Sehr nützlich ist die folgende alternative Beschreibung von Polytopen.

Satz 2.3 *Eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Polytop, wenn es endlich viele Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ gibt mit*

$$P = \mathit{convex}\{v_1, \ldots, v_r\}.$$

Beweis : Siehe [Zie], Theorem 1.1. □

Übungsaufgabe: Überlegen Sie sich, dass gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{convex}\{v_1,\dots,v_r\} &= \{v\in\mathbb{R}^n : v=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n\\ &\quad \text{für } \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}_{\geqq 0} \text{ mit } \lambda_1+\dots+\lambda_n=1\}.\end{aligned}$$

Lemma 2.4 ***(Lemma von Farkas)***
Sei $A\in\mathbb{R}^{d\times n}$ und $\beta\in\mathbb{R}^d$. Dann gibt es entweder ein $x\in\mathbb{R}^n$ mit

$$Ax\leqq\beta$$

oder aber es existiert ein Zeilenvektor $c\in\mathbb{R}^{1\times d}$ mit $c\geqq 0, cA=0$ und $c\beta<0$.

Beweis : Siehe [Zie], Proposition 1.7. Man sieht leicht, dass beide Bedingungen nicht gleichzeitig eintreten können, da sonst $0=0x=(cA)x=d(Ax)\leqq c\beta$ gelten würde. □

Dieses grundlegende Lemma hat folgendes wichtige Korollar:

Lemma 2.5 *Es sei $A\in\mathbb{R}^{d\times n}$ und $\beta\in\mathbb{R}^d$. Dann gibt es entweder ein $x\in\mathbb{R}^n$ mit*

$$Ax=\beta \textit{ und } x\geqq 0$$

oder es existiert ein Zeilenvektor $c\in\mathbb{R}^{1\times d}$ mit $cA\geqq 0$ und $c\beta<0$, aber nicht beides. Hier schreiben wir $v\geqq 0$ für einen Vektor $v\in\mathbb{R}^n$, falls alle Koordinaten $\geqq 0$ sind.

Beweis : Wende Lemma 2.4 auf das System linearer Ungleichungen

$$\begin{aligned}Ax &\leqq \beta\\ -Ax &\leqq -\beta\\ -E_n x &\leqq 0\end{aligned}$$

an! Falls $(c_1,c_2,b)\in\mathbb{R}^{1\times 2d+n}_{\geqq 0}$ die Gleichungen

$$c_1A+c_2(-A)-b\geqq 0$$

sowie $c_1\beta-c_2\beta<0$ erfüllt, so folgt $(c_1-c_2)A=b\geqq 0$ und $(c_1-c_2)\beta<0$. □

Definition 2.6 *Es sei $P\subset\mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Eine **Seite** von P ist eine Teilmenge der Form*

$$F=P\cap\{x\in\mathbb{R}^n :< c,x>=\beta_0\},$$

wobei $c\in\mathbb{R}^n$ und $\beta_0\in\mathbb{R}$ so gewählt sind, dass

$$P\subset\{x\in\mathbb{R}^n :< c,x>\leqq\beta_0\}$$

gilt.

Wir nennen nulldimensionale Seiten von P Ecken, eindimensionale Seiten Kanten und $1-$kodimensionale Seiten Facetten. Mit vert (P) bezeichnen wir die Eckenmenge.

Lemma 2.7 *i) Jede Seite F von P ist selbst ein Polyeder.*

ii) Der Schnitt von zwei Seiten ist eine Seite.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Satz 2.8 *Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop.*

i) P ist die konvexe Hülle seiner Ecken: $P =$ convex$\big($vert$(P)\big)$

ii) Falls P die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist, so enthält V alle Ecken von P.

Beweis : Nach Satz 2.3 gibt es eine endliche Teilmenge $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$ mit $P = \text{convex}(V)$. Für jede solche Teilmenge gilt folgendes: Ist

$$v_i \in \text{convex}(V \backslash \{v_i\}),$$

so ist $P = \text{convex}(V \backslash \{v_i\})$, wir können v_i also einfach weglassen, ohne die konvexe Hülle zu verändern.

Wir zeigen jetzt: Jedes $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ mit

$$x \notin \text{ convex } (V \backslash \{x\})$$

ist eine Ecke von P. Wir setzen

$$W = V \backslash \{x\} = \{w_1, \ldots, w_{r-1}\}.$$

Dann gibt es kein $t \in \mathbb{R}^{r-1}_{\geqq 0}, t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{r-1} \end{pmatrix}$ mit $\sum\limits_{i=1}^{r-1} t_i w_i = x$ und $\sum\limits_{i=1}^{r-1} t_i = 1$.

Sei A die $\big(n \times (r-1)\big)-$Matrix mit den Spalten $w_1, \ldots, w_{r-1}$ und sei $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{1 \times (r-1)}$. Dann gibt es also kein $t \in \mathbb{R}^{r-1}_{\geqq 0}$ mit

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2.5 existiert daher ein $c \in \mathbb{R}^{1\times(n+1)}$ mit $(c_0, \ldots, c_0) + (c_1, \ldots, c_n)A \geqq 0$ und $c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i < 0$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \langle c, z \rangle. \end{aligned}$$

Es gilt $f(x) < -c_0$ und $f(w_j) \geqq -c_0$ für alle j. Auf der kompakten Teilmenge P nimmt die Funktion f ihr Minimum δ ein. Dann ist $P \subset \{f(z) \geqq \delta\}$ und $P \cap \{f(z) = \delta\} = \{x\}$. Also ist x eine Ecke von P.

Daraus folgt die Behauptung (Übungsaufgabe). □

Korollar 2.9 *Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop und F eine Seite von P. Dann sind die Seiten des Polytops F genau die Seiten F' von P mit $F' \subset F$.*

Definition 2.10 *Ein **polyedrischer Komplex** ist eine endliche Menge Σ von Polyedern, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

i) Ist $P \in \Sigma$, so ist jede nicht-leere Seite von P in Σ.

ii) Sind $P, Q \in \Sigma$, so ist $P \cap Q$ eine Seite von P und von Q.

Wir nennen die Elemente von Σ auch die Seiten des polyedrischen Komplexes.

Betrachtet man Polyeder P, die keine Polytope sind, dann ist der Begriff des **Linearraums** L nützlich: Der Linearraum L ist der größte Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, so dass für jedes $x \in P$ und $y \in L$ auch $x + y$ in P liegt.

Der affine Span eines Polyeders P ist der kleinste affine Unterraum $x + W$ ($x \in \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum) mit $P \subset x + W$. Wir definieren dann $\dim P = \dim W$ als Dimension des Polyeders. Ein polyedrischer Komplex Σ heißt **rein von Dimension d**, falls jede (inklusions-)maximale Seite Dimension d hat.

Definition 2.11 *Es sei Γ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$. Ein $\Gamma-$rationales Polytop ist definiert als ein Polytop der Form*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqq \beta\}$$

für ein $A \in \mathbb{Q}^{d\times n}$ und ein $\beta \in \Gamma^d$.

Eine wichtige Klasse von Polyedern sind die polyedrischen Kegel:

Definition 2.12 *Ein* ***polyedrischer Kegel*** C *im* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Teilmenge der Form*

$$C = \Big\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i : \lambda_i \geqq 0 \, \textit{für alle } i \Big\}$$

für $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$.

C *heißt* ***simplizial****, falls* $v_1, \ldots, v_r$ *linear unabhängig sind.*

Satz 2.13 C *ist genau dann ein polyedrischer Kegel im* $\mathbb{R}^n$*, wenn es eine* $d \times n$*-Matrix* A *über* $\mathbb{R}$ *gibt mit*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqq 0\}.$$

Beweis : Übungsaufgabe. □

Jede Seite von C ist von der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leqq 0\},$$

wobei A' eine $(d' \times n)-$Untermatrix von A ist für ein $d' \leqq d$ (Übungsaufgabe).

Definition 2.14 *Ein* ***Fächer*** *im* $\mathbb{R}^n$ *ist eine endliche Menge*

$$\mathcal{F} = \{C_1, \ldots, C_N\}$$

von polyedrischen Kegeln im $\mathbb{R}^n$*, so dass gilt:*

i) Jede nichleere Seite eines Kegels in $\mathcal{F}$ *liegt in* $\mathcal{F}$*.*

ii) Der Schnitt von zwei Kegeln in $\mathcal{F}$ *ist eine Seite beider Kegel.*

Der Fächer $\mathcal{F}$ heißt **vollständig**, falls

$$C_1 \cup \ldots \cup C_N = \mathbb{R}^n$$

gilt. $\mathcal{F}$ heißt **punktiert**, falls $0 \in \mathcal{F}$ (und damit eine Seite jedes Kegels in $\mathcal{F}$) ist. $\mathcal{F}$ heißt **simplizial**, falls alle Kegel in $\mathcal{F}$ simplizial sind.

Definition 2.15 *Es sei* P *ein nicht-leeres Polytop im* $\mathbb{R}^n$*. Für jede Seite* F *von* P *sei*

$$N_F = \{c \in \mathbb{R}^n : F \subset \big\{x \in P : \langle c, x \rangle = \min_{y \in P} = \langle c, y \rangle \big\}\}$$

Satz 2.16 *N_F ist ein Kegel im $\mathbb{R}^n$ und die Menge*

$$\mathcal{N}(P) = \{N_F : F \text{ ist eine nicht-leere Seite von } P\}$$

ist ein vollständiger Fächer im $\mathbb{R}^n$. Falls P die Dimension n hat, so ist $\mathcal{N}(P)$ punktiert.

Der Fächer $N(P)$ heißt (innerer) **Normalenfächer** von P.

Übungsaufgabe: Zeichnen Sie ein zweidimensionales Polytop im $\mathbb{R}^2$ und seinen Normalenfächer.

Beweis : Es sei V die Menge der Ecken von F. Dann gilt nach Korollar 2.9

$$V = F \cap \text{vert}(P).$$

Also gilt vert $(P) = \{v_1, \ldots, v_r\}$ und $V = \{v_1, \ldots, v_s\}$ für ein $s \leqq r$.

Dann gilt

$$N_F = \{c \in \mathbb{R}^n : \langle c, v_i \rangle = \min_{j=1,\ldots,r} \langle c, v_j \rangle \text{ für alle } i = 1, \ldots, s\}.$$

Also ist N_F ein Kegel.

Die Fächereigenschaften lassen wir als Übungsaufgabe. □

3 Ebene Kurven

Um ein Gefühl für tropische Hyperflächen zu bekommen, studieren wir zunächst Hyperflächen im $\mathbb{R}^2$ — also Kurven.

Sei $p(x, y) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} a_{ij} x^{\textcircled{i}} \odot y^{\textcircled{j}} = \min_{i,j} \{a_{ij} + ix + jy\}$ ein tropisches Polynom in zwei Variablen.

Wir nennen die zugehörige tropische Hyperfläche $V(p)$ auch **ebene tropische Kurve**.

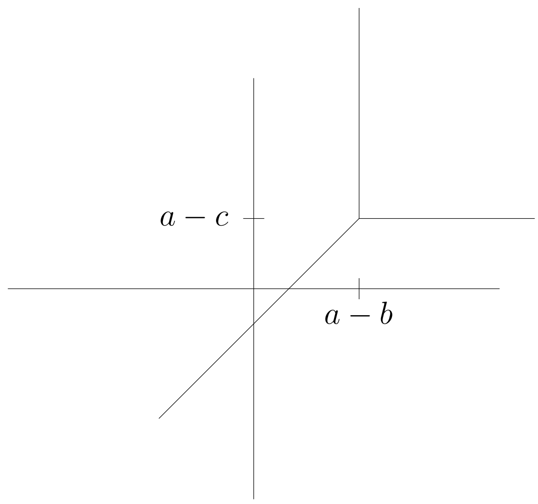
Betrachten wir zunächst eine tropische *Gerade*, also ein Polynom vom Grad 1:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a \oplus b \odot x \oplus c \odot y \\ &= \min\{a, b + x, c + y\}. \end{aligned}$$

Wir suchen diejenigen Punkte in der Ebene, für die das Minimum zweimal angenommen wird. Dies ist offenbar die Menge

$$\begin{aligned} V(p) &= \{(a-b, y) : y \geqq a-c\} \\ &\cup \{(x, a-c) : x \geqq a-b\} \\ &\cup \{\big(x, x+(c-b)\big) : x \leqq c-b\} \end{aligned}$$

Der erste Teil ist eine Halbgerade parallel zur $y-$Achse in $(a-b, a-c)$, der zweite Teil ist eine Halbgerade parallel zur $x-$Achse in $(a-b, a-c)$ und der dritte Teil ist ein Teil der Gerade $y = x + (c-b)$ links vom Punkt $(a-b)$. Es ergibt sich somit folgender „Tripod“:



Eine lineare ebene tropische Kurve ist also ein Graph mit einer Ecke und drei Halbstrahlen in dieser Ecke.

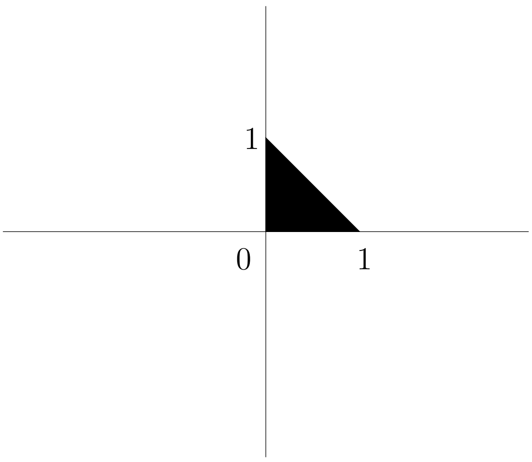
Übungsaufgabe: Zeichnen Sie ein zweidimensionales Polytop im $\mathbb{R}^2$ und seinen Normalenfächer.

Definition 3.1 *Es sei* $p(x,y) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} a_{ij}\, x^{\textcircled{i}} \odot y^{\textcircled{j}}$ *ein tropisches Laurent-Polynom in zwei Variablen. Das Newtonpolytop Newt*(p) *in* p *ist definiert als die konvexe Hülle aller* $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$*, so dass der Koeffizient* $a_{ij} \neq \infty$ *ist.*

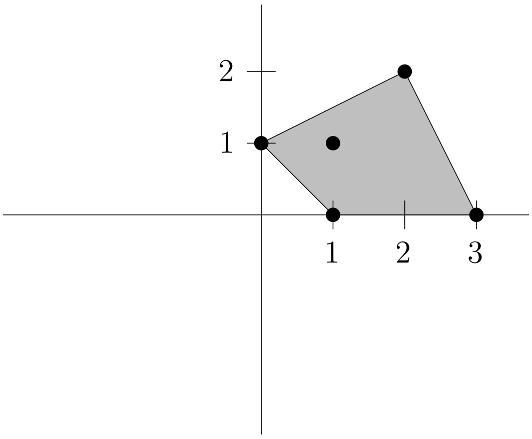
Beispiel:

i) Für die tropische Gerade $p(x,y) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot y$ erhalten wir ein Dreieck

$$\text{Newt}(P) = \text{convex}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$



ii) Für $p(x,y) = x \oplus y \oplus x^{\textcircled{3}} \oplus x \odot y \oplus x^{\textcircled{2}} \odot y^{\textcircled{2}}$ erhalten wir folgendes Polytop:



Satz 3.2 *Es sei* $p(x,y) = \bigoplus\limits_{(i,j)\in I} x^{\textcircled{i}} \odot y^{\textcircled{j}}$ *ein tropisches (Laurent-)Polynom in zwei Variablen mit Koeffizienten* $a_{ij} = 0$ *für alle* $i,j \in I$*, wobei* $I \subset \mathbb{Z}^2$ *eine endliche Teilmenge ist. Dann ist die zugehörige tropische Hyperfläche* $V(p)$ *das* $1-$*Skelett des Normalfächers* $\mathcal{N}$ *zum Newtonpolytop Newt*(p)*, das heißt,* $V(p)$ *besteht aus allen Kegeln in* $\mathcal{N}$ *der Dimension* $\leqq 1$.

Beweis : $V(p)$ besteht aus allen Punkten $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, in denen das Minimum der Funktionen $ix + jy$ für $i,j \in I$ zweimal angenommen wird.

Es ist $\mathrm{Newt}(p) = \mathrm{convex}\{v_{ij} : (i,j) \in I\}$, wobei $v_{ij} = \binom{i}{j}$ gilt.

Ist v_{kl} keine Ecke von $\mathrm{Newt}(p)$, dann liegt v_{kl} in der konvexen Hülle der übrigen v_{ij}. Das Newtonpolygon ändert sich also nicht, wenn wir v_{kl} weglassen.

Es gilt in diesem Fall

$$v_{kl} = \sum_{(i,j)\neq(k,l)} b_{ij} v_{ij}$$

für $b_{ij} \in [0,1]$ mit $\sum\limits_{(i,j)\neq(k,l)} b_{ij} = 1$.

Daher ist

$$\begin{aligned} \binom{k}{l} &= \sum_{(i,j)\neq(k,l)} b_{ij} \binom{i}{j}, \\ \text{also } kx + ly &= \sum_{(i,j)\neq(k,l)} b_{ij} ix + b_{ij} jy \\ &\geqq \min\{ix + jy : (i,j) \neq (k,l)\}, \end{aligned}$$

also ist $p(x,y) = \bigoplus\limits_{\substack{(i,j)\in I \\ (i,j)\neq(k,l)}} x^{\textcircled{i}} \odot y^{\textcircled{j}}$ und wir können die lineare Funktion $kx + ly$ auch im tropischen Polynom p weglassen, ohne $V(p)$ zu verändern.

Also können wir annehmen, dass das Newtonpolynom von $p(x,y) = \bigoplus\limits_{(i,j)\in I} x^{\textcircled{i}} \odot y^{\textcircled{j}}$ die Ecken $v_{ij} = \binom{i}{j}$ für $(i,j) \in I$ hat.

Sind v_{rs} und v_{kl} benachbarte Ecken in Newt(p), so ist die Strecke zwischen v_{rs} und v_{kl} eine Kante F von Newt(p).

Der zugehörige Normalenkegel N_F enthält alle $c \in \mathbb{R}^2$, die auf dieser Kante (also auf v_{rs} und v_{kl}) ihr Minimum annehmen.

Also folgt

$$N_F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : rx + sy = kx + ly = \min_{(i,j)\in I} \{ix + jy\} \right\}$$

Das ist offenbar eine Teilmenge von $V(p)$.

Umgekehrt betrachten wir einen Punkt $\binom{x}{y} \in V(p)$. Dann gibt es definitionsgemäß (r,s) und (k,l) in I mit

$$rx + sy = kx + ly = \min_{(i,j)\in I} \{ix + jy\}.$$

Der Vektor $\binom{x}{y}$ liegt also im Normalenkegel der Verbindungsstrecke von v_{rs} und v_{kl} in $\mathbb{R}^2$. Diese Strecke ist eine Kante von Newt(p) (wieso ?). Also ist $\binom{x}{y}$ im $1-$Skelett des Normalenfächers von Newt(p) enthalten. $\square$

Im Uhrzeigersinn nummerieren wir die Ecken von Newt(p) als

$$v_{i_1,j_1}, v_{i_2,j_2}, \ldots, v_{i_r,j_r},$$

so dass jeweils v_{i_k,j_k} und $v_{i_{k+1},j_{k+1}}$ sowie v_{i_r,j_r} und v_{i_1,j_1} eine Kante von Newt(p) bilden.

Dann besteht $V(p)$ nach Satz 3.2 aus den Halbstrahlen $\mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} j_{k+1} & - & j_k \\ i_k & - & i_{k+1} \end{pmatrix}$ und $\mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} j_1 & - & j_r \\ i_r & - & i_1 \end{pmatrix}$. Nun gilt für $w_k = \begin{pmatrix} j_{k+1} & - & j_k \\ i_k & - & i_{k+1} \end{pmatrix}$ $(k = 1, \ldots, r-1)$ und $w_r = \begin{pmatrix} j_1 & - & j_r \\ i_r & - & i_1 \end{pmatrix}$ offenbar $\sum\limits_{k=1}^{r} w_k = 0$.

Das ist ein Spezialfall der Gleichgewichtsbedingung, die wir später auf tropischen Varietäten kennenlernen werden.

Jetzt untersuchen wir $V(p)$ für ein beliebiges tropisches Polynom

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \bigoplus_{(i,j)\in I} a_{ij} \odot x^{ⓘ} \odot y^{ⓙ} \\ &= \min_{(i,j)\in I} \{a_{ij} + ix + jy\}. \end{aligned}$$

Wir definieren das erweiterte Newtonpolytop von p als

$$\begin{aligned} \text{Newt}_{\text{ext}}(p) &= \text{convex}\{(i,j,a_{ij}) : (i,j) \in I\} \\ &\subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

und können nach dem schon diskutierten Fall annehmen, dass Newt$_{\text{ext}}(p)$ dreidimensional ist.

Dann wird Newt$_{\text{ext}}(p)$ unter der Projektion $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ auf die ersten beiden Koordinaten surjektiv auf Newt(p) abgebildet.

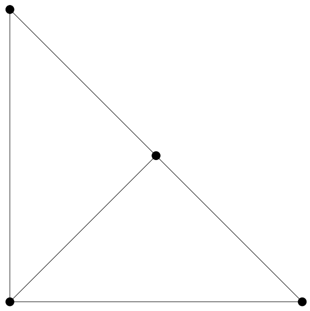
Wir betrachten den Normalenfächer $\mathcal{N}$ des erweiterten Newtonpolytops. $\mathcal{N}$ ist ein Fächer im $\mathbb{R}^3$. Es sei F eine Seite von Newt$_{\text{ext}}(p)$. Wir nennen F (von unten) „sichtbar“, falls der Normalenkegel N_F einen Vektor der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ enthält.

Dann ist für jedes sichtbare F in Newt$_{\text{ext}}(p)$ die Projektion $\rho(F)$ ein Polytop, das in Newt(p) enthalten ist. Die $p(F)$ für sichtbare F bilden einen polyedrischen Komplex, der das Polytop Newt(p) zerlegt. Wir nennen diese Zerlegung auch Newton-Zerlegung.

Beispiel: $p(x,y) = 3 \odot x^{②} + 2 \odot x \odot y \oplus 3 \odot y^{②} \oplus 0$.

(Zeichnen Sie $\text{Newt}_{\text{ext}}(p)$ mit einem Computeralgebraprogramm!)

Hier ist die polyedrische Zerlegung die folgende:



Satz 3.3 *Es sei p wie oben ein tropisches Polynom in 2 Variablen. Dann ist die tropische Nullstellenmenge $V(p)$ ein Graph, der dual zur Newtonzerlegung von $Newt(p)$ in folgendem Sinn ist: Die Ecken von $V(p)$ entsprechen den zweidimensionalen Seiten in dieser Zerlegung, die Kanten von $V(p)$ sind orthogonal zu den eindimensionalen Seiten in dieser Zerlegung und falls eine Ecke v auf einer Kante e liegt, dann enthält die zweidimensionale Seite zu v die eindimensionale Seite von e.*

Beweis : Für $(k,l) \neq (r,s)$ in I setzen wir

$$V_{(k,l),(r,s)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_{kl} + kx + ly = a_{rs} + rx + sy = \min_{(i,j)\in I} \{a_{ij} + ix + jy\} \right\}.$$

Dann ist definitionsgemäß

$$V(p) = \bigcup_{(r,s)\neq(k,l)} V_{(k,l),(r,l)}$$

Nun ist

$$V_{(kl),(r,s)} = \rho \left\{ c = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} k \\ l \\ a_{kl} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle c, \begin{pmatrix} r \\ s \\ a_{rs} \end{pmatrix} \right\rangle = \min_{(i,j)\in I} \left\langle c, \begin{pmatrix} i \\ j \\ a_{ij} \end{pmatrix} \right\rangle \right\}.$$

Somit ist $V_{(k,l),(r,s)}$ genau dann nicht leer, wenn die Ecken $\begin{pmatrix} k \\ l \\ a_{kl} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} r \\ s \\ a_{rs} \end{pmatrix}$ in $\text{Newt}_{\text{ext}}(p)$ auf einer Kante F von $\text{Newt}_{\text{ext}}(p)$ liegen und wenn der Kegel N_F eine nicht-negative $z-$Koordinate hat. Also ist F eine sichtbare Kante von $\text{Newt}_{\text{ext}}(p)$.

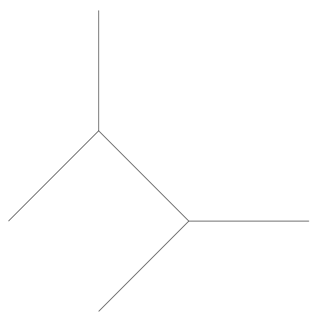
Liegt $\rho \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ in $V_{(k,l),(r,s)}$, so gilt

$$y = \frac{r-k}{l-s}x + \frac{a_{rs} - a_{kl}}{l-s}.$$

Diese Gerade ist orthogonal zur Verbindungsgeraden von $\binom{k}{l}$ und $\binom{r}{s}$, welche Steigung $\frac{k-r}{l-s}$ hat, wie man leicht nachprüft.

Also ist $V(p)$ tatsächlich die Vereinigung von Kanten (beschränkten Kanten und Halbstrahlen) orthogonal zu den eindimensionalen Seiten der Newtonzerlegung. In einem Punkt stoßen genau dann mehr als zwei Kanten zusammen, so dass eine Ecke entsteht, wenn die zugehörigen Kanten in der Newtonzerlegung eine zweidimensionale Seite umschließen. $\square$

Im unteren obigen Beispiel sieht die tropische Kurve zu $p(x,y)$ folgendermaßen aus:



Wir betrachten folgendes Beispiel. Sei

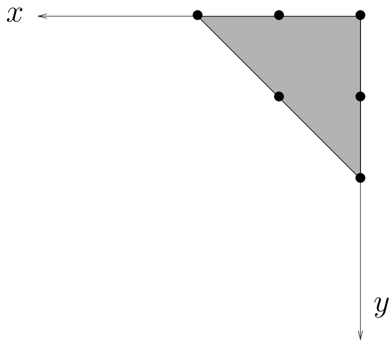
$$p(x,y) = a \odot x^{②} + b \odot x \odot y \oplus c \odot y^{②} \oplus d \odot y \oplus e \oplus f \odot x$$

ein quadratisches tropisches Polynom mit Koeffizienten $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, die den Ungleichungen

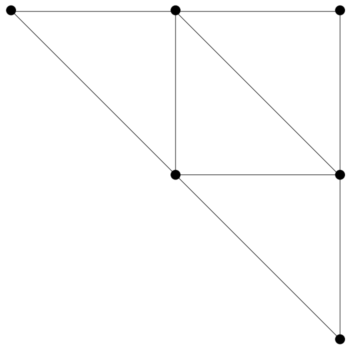
$$2b < a+c,\ 2f < a+e,\ 2d < c+e$$

genügen.

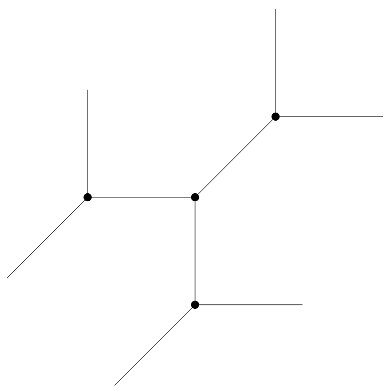
Wir zeichnen das Newtonpolytop von p am Ursprung gespiegelt:



Die Newtonzerlegung sieht folgendermaßen aus:



Die tropische Kurve ist dual dazu:



4 Bewertungen

Um tropische Polynome aus gewöhnlichen Polynomen mit Koeffizienten in einem Körper herzuleiten, benötigen wir einige Grundbegriffe über Bewertungen.

Es sei K ein Körper.

Definition 4.1 *Eine Bewertung auf K ist eine Funktion*

$$v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

so dass für alle $a, b \in K$ gilt:

i) $v(a) = \infty$ *genau dann, wenn* $a = 0$.

ii) $v(ab) = v(a) + v(b)$

iii) $v(a + b) \geqq \min\{v(a), v(b)\}$

Das Bild der Bewertungsabbildung $v(K^*) \subset \mathbb{R}$ nennen wir auch Wertegruppe von v und bezeichnen es mit Γ_v.

Beispiel

i) Jeder Körper trägt die triviale Bewertung

$$v(a) = \begin{cases} \infty & , \quad a = 0 \\ 0 & , \quad a \neq 0. \end{cases}$$

ii) Auf dem Körper $\mathbb{Q}$ ist für jede Primzahl p die $p-$adische Bewertung

$$v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

definiert als

$$v_p\left(\frac{m}{n}\right) = -v_p(m) + v_p(n),$$

wobei $v_p(m)$ für eine ganze Zahl $m \neq 0$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von m ist.

iii) Es sei K ein beliebiger Körper und $K[X]$ der Polynomring. Auf dem Quotientenkörper

$$K(X) = \text{Quot } K[X] = \left\{\frac{f}{g} : f, g \in K[X], g \neq 0\right\}$$

können wir eine Bewertung definieren durch

$$v_0\left(\frac{f}{g}\right) = v_0(f) - v_0(g),$$

wobei für ein Polynom $f \in K[X]$ der Wert $v_0(f)$ definiert ist als die Nullstellenordnung von f in 0.

Lemma 4.2 *Es sei K ein Körper mit einer Bewertung v. Falls $v(a) \neq v(b)$ ist, so folgt*

$$v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}.$$

Beweis : Übungsaufgabe oder [NZ]. □

Ist v eine Bewertung auf K, so ist

$$R = \{a \in K^* : v(a) \geqq 0\} \cup \{0\}$$

ein Ring und

$$\mathfrak{M} = \{a \in K^* : v(a) > 0\} \cup \{0\}$$

ein Ideal in R. (Prüfen Sie das!)

Lemma 4.3 *i) Jedes $a \in K$ mit $v(a) = 0$ ist eine Einheit in R.*

ii) Der Ring R ist lokal, das heißt, er besitzt nur ein maximales Ideal. Das maximale Ideal in R ist $\mathfrak{M}$.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Den Körper $R/\mathfrak{M}$ nennen wir auch Restklassenkörper von v.

Beispiel: Im Falle der $p-$adischen Bewertung auf $\mathbb{Q}$ schreiben wir auch $R = \mathbb{Z}_p$. Dieser Ring enthält $\mathbb{Z}$. Das maximale Ideal $\mathfrak{M}$ enthält das Hauptideal

$$p\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} : p \mid m\}$$

aus $\mathbb{Z}$. Der Restklassenkörper ist in diesem Fall

$$R/\mathfrak{M} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p.$$

Ist v eine nicht-triviale Bewertung auf K, so normieren wir v immer so, dass 1 in der Wertegruppe liegt, indem wir eventuell von v zu einer Bewertung λv mit $\lambda > 0$ übergehen. Dies ändert den Bewertungsring und das maximale Ideal nicht.

Ein Körper K heißt **algebraisch abgeschlossen**, falls jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ eine Nullstelle in K hat.

Beispiel: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ nicht.

Aus der Algebra verwenden wir die Tatsache, dass wir jeden Körper K in einen algebraisch abgeschlossenen Körper einbetten können. Ein minimaler algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von K heißt **algebraischer Abschluss** von K. Wir verwenden dafür die Bezeichnung $\overline{K}$.

Lemma 4.4 *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit einer nicht-trivialen Bewertung. Dann ist die Wertegruppe Γ_v divisibel und dicht in $\mathbb{R}$.*

Beweis : Eine Untergruppe Γ von $\mathbb{R}$ ist definitionsgemäß divisibel, falls sie mit jedem $r \in \mathbb{R}$ auch alle $\frac{r}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ enthält. Es sei $a \in K$. Dann hat das Polynom $X^n - a$ eine Nullstelle b in K, da K algebraisch abgeschlossen ist. Aus $b^n = a$ folgt $nv(b) = v(a)$, also liegt mit $v(a)$ auch $\frac{1}{n}v(a)$ in Γ_v. Somit ist Γ_v divisibel. Aus $1 \in \Gamma_v$ und der Divisibilität von Γ_v folgt, dass $\mathbb{Q} \subset \Gamma_v$ ist. Daher liegt Γ_v dicht in $\mathbb{R}$. □

Es ist oft nützlich, eine Kopie der Wertegruppe in K^* zu finden. Dies garantiert das folgende Lemma für algebraisch abgeschlossene Körper.

Lemma 4.5 *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit einer Bewertung v. Dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus*

$$\psi : \Gamma_v \to K^*$$

mit $v\big(\psi(r)\big) = v$ für alle $r \in \Gamma_v$. Mit anderen Worten: Der surjektive Gruppenhomomorphismus

$$v : K^* \to \Gamma_v$$

besitzt eine Spaltung.

Beweis : Hier braucht man folgenden Struktursatz für Gruppen: Jede torsionsfreie divisible Gruppe ist isomorph zu einer (möglicherweise unendlichen) Summe von Kopien von $\mathbb{Q}$. Γ_v ist als Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ torsionsfrei, das heißt, aus $mr = 0$ für $r \in \Gamma_v$ und $m \geqq 1$ folgt $r = 0$. Also lässt sich der obige Struktursatz auf Γ_v anwenden.

Für jede Kopie in $\mathbb{Q}$, die in Γ_v auftaucht, haben wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$p : \Gamma_v \to \mathbb{Q}.$$

Wir wählen ein $a \in \Gamma_v$ mit $p(a) = 1$ und ein $w \in K^*$ mit $v(w) = a$. Dann ist $a\mathbb{Q}$ eine Untergruppe von Γ_v, die unter p isomorph auf $\mathbb{Q}$ abgebildet wird. Wir definieren einen Gruppenhomomorphismus

$$\psi : a\mathbb{Q} \to K^*$$

mit Hilfe $n-$ter Wurzeln im algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dies setzt sich zusammen zum gewünschten Homomorphismus $\Gamma_v \to K^*$. □

Es sei K ein beliebiger Körper mit einer Bewertung v. Für jedes positive $e \in \mathbb{R}$ erhalten wir dann durch

$$|a| = e^{-v(a)}$$

einen Betrag auf K, wenn wir $e^{-\infty} = 0$ setzen. (Prüfen Sie das nach!) Dieser Betrag erfüllt die nicht-archimedische Dreiecksungleichung

$$|a + b| \leqq \max\{|a|, |b|\}$$

sowie

$$|a + b| = \max\{|a|, |b|\},$$

falls $|a| \neq |b|$ gilt.

Die triviale Bewertung führt zum trivialen Absolutbetrag

$$|a| = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ 1 & a \neq 0. \end{cases}$$

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir eine Bewertung v auf einem Körper K, den wir in einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ einbetten. $\overline{K}$ enthält alle Nullstellen normierter Polynome

$$f(x) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1X + c_0$$

mit Koeffizienten $c_i \in K$.

Das Polynom f heißt irreduzibel, falls man es nicht als Produkt $f = f_1 \cdot f_2$ von zwei nicht-konstanten Polynomen $f_1, f_2 \in K[X]$ schreiben kann.

Ist $a \in \overline{K}$ eine Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ wie oben, so heißt $\mathcal{N}(\alpha) := (-1)^n c_0$ die Norm von α. Wir setzen $v(\alpha) = \frac{1}{n} v\big(\mathcal{N}(\alpha)\big)$ und erhalten somit eine Funktion

$$v : \overline{K}^* \to \mathbb{R},$$

die die Bewertung $v : K^* \to \mathbb{R}$ fortsetzt. Man kann mit Hilfe von etwas Körpertheorie aus der Algebra zeigen, dass auch die Fortsetzung v auf $\overline{K}$ eine Bewertung ist.

5 Algebraische Geometrie

Wir betrachten den Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K. Dieser ist noethersch, das heißt, jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ist endlich erzeugt. Zur Erinnerung: Wir nennen ein Ideal $\mathfrak{a} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ endlich erzeugt, falls es $f_1, \ldots, f_r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gibt mit

$$\mathfrak{a} = \{g_1 f_1 + \ldots + g_r f_r : g_1, \ldots, g_r \in K[X_1, \ldots, X_n]\}.$$

In diesem Fall schreiben wir auch

$$\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r).$$

Ohne Beweis verwenden wir den folgenden Satz:

Satz 5.1 *(Hilbertscher Nullstellensatz) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ist dann von der Form*

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$$

für $a_1, \ldots, a_n \in K$.

Für den Moment sei K wieder ein beliebiger Körper, und wir schreiben $A = K[X_1, \ldots, X_n]$. Mit

$$\mathbb{A}^n(K) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n\}$$

bezeichnen wir den $K-$Vektorraum der n-dimensionalen Zeilenvektoren. Dieser heißt **affiner Raum über K**.

Mit $T(K)$ oder $T^n(K)$ bezeichnen wir folgende Teilmenge von $\mathbb{A}^n(K)$:

$$T(K) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n : \text{ alle } a_i \neq 0\}.$$

Wir nennen $T(K)$ auch den $n-$dimensionalen Torus über K.

Mit $\mathbb{P}^n(K)$ bezeichnen wir den Quotientenraum (also die Menge der Äquivalenzklassen)

$$\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{A}^{n+1}(K) \backslash \{(0 \ldots 0)\} / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt definiert ist:

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \sim (b_1, \ldots, b_{n+1}) \text{ genau dann,}$$

wenn es ein $\lambda \in K^*$ gibt mit $a_1 = \lambda b_i$ für alle $i = 1, \dots, n+1$.

$\mathbb{P}^n(K)$ ist also einfach die Menge aller Geraden im K^{n+1}. Wir schreiben $[a_1 : \dots : a_{n+1}]$ für die Äquivalenzklasse von $(a_1, \dots, a_{n+1})$ in $\mathbb{P}^n(K)$.

Ist $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{A}^n(K)$ und $f \in A$, so ist $f(P) = f(P_1, \dots, P_n) \in K$. Ist $f(P) = 0$, so nennen wir P **Nullstelle von f**.

Lemma 5.2 *Es sei $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ ein Ideal in $A = K[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist*

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{a}) : &= \{P \in \mathbb{A}^n(K) : g(P) = 0 \textit{ für alle } g \in \mathfrak{a}\} \\ &= \{P \in \mathbb{A}^n(K) : f_1(P) = \dots = f_r(P) = 0\}. \end{aligned}$$

Wir nennen $V(\mathfrak{a})$ die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$ oder auch die affine Varietät zu $\mathfrak{a}$.

Lemma 5.3 *Nimmt man als offene Mengen von $\mathbb{A}^n(K)$ gerade die Komplemente*

$$\mathbb{A}^n(K) \backslash V(\mathfrak{a})$$

für alle Ideale $\mathfrak{a} \subset A$, so wird $\mathbb{A}^n(K)$ zu einem topologischen Raum. Diese Topologie heißt Zariski-Topologie.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Zwei verschiedene Ideale können dieselbe affine Varietät definieren. So ist etwa

$$V\big((X)\big) = V\big((X^2)\big)$$

in $\mathbb{A}^1(K)$.

Man kann mit Hilfe des Hilbertschen Nullstellensatzes zeigen, dass für einen algebraisch abgeschlossenen Körper gilt

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}},$$

wobei $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A : \text{ es gibt ein } n \geqq 1 \text{ mit } f^n \in \mathfrak{a}\}$

das sogenannte Radikal von $\mathfrak{a}$ ist. Einen Beweis finden Sie in [AG].

Für ein $f \in A = K[X_1, \dots, X_n]$ definieren wir wie folgt eine Teilmenge $D(f)$ von $\mathbb{A}^n(K)$:

$$D(f) = \{P \in \mathbb{A}^n(K) : f(P) \neq 0\}.$$

$D(f)$ besteht also einfach aus allen Punkten, die keine Nullstelle von f sind.

Da $\mathbb{A}^n(K) \backslash D(f) = V\big((f)\big)$ für das Hauptideal (f) gilt, ist $D(f)$ offen.

Beispiel: Es ist $T^n = D(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \subset \mathbb{A}^n(K)$.

Lemma 5.4 *Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{A}^n(K)$ in der Zariskitopologie enthält eine Menge $D(f)$ für ein $f \in A$. Es gibt sogar $f_1, \ldots, f_r \in A$ mit*

$$U = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r).$$

Beweis : Ist $U \subset \mathbb{A}^n(K)$ offen in der Zariskitopologie, so gilt $U = \mathbb{A}^n(K) \backslash V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A.

Für jedes $f \in \mathfrak{a}$ gilt definitionsgemäß

$$D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset,$$

also folgt $D(f) \subset U$.

Um die stärkere Behauptung zu zeigen, wählen wir Erzeuger von $\mathfrak{a}$, also

$$\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r).$$

Dann ist offenbar $\bigcap\limits_{i=1}^{r} V\big((f_i)\big) = V(\mathfrak{a})$, also

$$D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r) = U.$$

$\square$

Definition 5.5 *Es sei $\mathcal{T}$ ein topologischer Raum. Eine nicht-leere Teilmenge $Z \subset \mathcal{T}$ heißt irreduzibel, wenn Z nur auf triviale Weise als Vereinigung von in Z abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann. Mit anderen Worten: Aus*

$$Z = Z_1 \cup Z_2$$

mit $Z_1, Z_2 \subset Z$ abgeschlossen folgt

$$Z_1 = Z \text{ oder } Z_2 = Z.$$

In der Zariskitopologie gibt es — im Gegensatz zur üblichen Topologie auf dem $\mathbb{R}^n$ — viele abgeschlossene Mengen, die nicht irreduzibel sind.

Beispiel: In $\mathbb{A}^2(K)$ ist

$$V\big((x \cdot y)\big) = V\big((x)\big) \cup V\big((y)\big)$$

nicht irreduzibel.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Primideal, dann ist $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel. Umgekehrt gilt: Ist $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel, so ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal (Übungsaufgabe).

Die Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^n(K)$ induziert auf natürliche Weise eine Topologie auf $T(K)$, deren abgeschlossene Mengen gerade die Mengen der Form

$$V(\mathfrak{a}) \cap T(K) = \{P \in T(K) : f(P) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}$$

für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ sind.

Wir schreiben $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}] = \{\sum\limits_{I \subset \mathbb{Z}^n} a_I X^I : a_I \in K\}$ mit der Multiindexnotation $X^I = X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ für $I = (i_1, \ldots i_n)$. Dieser Ring $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ heißt Ring der Laurentpolynome in $X_1, \ldots, X_n$ über K. Wir nennen ihn auch den Koordinatenring von $T(K)$.

Wir haben eine natürliche Einbettung

$$A = K[X_1, \ldots, X_n] \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm n}].$$

Für ein Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ in A sei $\mathfrak{a} \cdot K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm n}]$ das Ideal

$$\left\{ \sum_{i=1}^{r} g_i f_i : g_1, \ldots g_r \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}] \right\} \text{ in } K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}].$$

Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ setzen wir $V_T(\mathfrak{b}) = \{P \in T(K) : f(P) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{b}\}$. Dann gilt $V(\mathfrak{a}) \cap T(K) = V_T(\mathfrak{a} \cdot K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}])$ (Übungsaufgabe).

Ist $\mathfrak{b} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein beliebiges Ideal, so ist ferner

$$V(\mathfrak{b} \cap K[X_1, \ldots, X_n]) \cap T(K) = V_T(\mathfrak{b})$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $T(K)$.

Erinnerung: Für jede Teilmenge X eines topologischen Raums bezeichnet man mit $\overline{X}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die X enthält. Es gilt

$$X = \bigcap_{\substack{X \subset Y \subset T \\ Y \text{ abgeschlossen}}} Y.$$

Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{M}$ der Form $\mathfrak{M} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ von A ist

$$V(\mathfrak{M}) = \{(a_1, \ldots, a_n)\} \subset \mathbb{A}^n(K)$$

abgeschlossen.

Lemma 5.6 *Ist K algebraisch abgeschlossen, so gilt für jedes Primideal* $\mathfrak{p} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ *mit* $V(\mathfrak{p}) \cap T \neq \emptyset$:

$$\overline{V(\mathfrak{p}) \cap T} = V(\mathfrak{p})$$

Beweis : Es gilt

$$V(\mathfrak{p}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K) : \mathfrak{p} \subset (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)\}$$

(Übungsaufgabe). Die Inklusion $\overline{V(\mathfrak{p}) \cap T} \subset V(\mathfrak{p})$ ist klar, da die rechte Seite abgeschlossen ist und $V(\mathfrak{p}) \cap T$ enthält.

Angenommen, es existiert ein $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$ mit $\mathfrak{p} \subset (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$, aber $(a_1, \ldots, a_n) \notin \overline{V(\mathfrak{p}) \cap T}$. Dann liegt $(a_1, \ldots, a_n)$ im offenen Komplement dieser Menge. Also existiert ein $f \in A$ mit $(a_1, \ldots, a_n) \in D(f)$ und $V(\mathfrak{p}) \cap T \cap D(f) = \emptyset$.

Nun ist $T = D(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$, also folgt $T \cap D(f) = D(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot f)$ (Übungsaufgabe). Aus $V(\mathfrak{p}) \cap D(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot f) = \emptyset$ folgt

$$V(\mathfrak{p}) \subset V(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot f)$$

und somit $(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot f)^N \in \mathfrak{p}$ für ein $N \geqq 1$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot f \in \mathfrak{p}.$$

Nach Voraussetzung gilt $V(\mathfrak{p}) \cap T \neq \emptyset$, also ist $V(\mathfrak{p}) \not\subset V(x_1, \ldots, x_n)$, woraus sich $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \notin \mathfrak{p}$ ergibt.

Somit folgt aus der Primidealeigenschaft $f \in \mathfrak{p}$. Wegen $\mathfrak{p} \subset (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ ergibt sich $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, was $(a_1, \ldots, a_n) \in D(f)$ widerspricht. Also folgt die Behauptung. □

Wir brauchen jetzt noch ein paar Grundbegriffe über homogene Polynome. Für jedes Monom $a_I X^I \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $I = (i_1, \ldots, i_n)$, heißt $|I| = i_1 + \ldots + i_n$ der Grad von $a_I X^I$.

Ein Polynom f in $K[X_1, \ldots, X_n]$ heißt **homogen**, falls alle auftretenden Monome denselben Grad haben. Dieser heißt auch homogener Grad von f.

Für jedes homogene Polynom f können wir seine Nullstellenmenge im projektiven Raum definieren:

$$\tilde{V}(f) = \{[a_0 \cdot \ldots \cdot a_n] \in \mathbb{P}^n(K) : f(a_0, \ldots, a_n) = 0\}$$

Das ist wohldefiniert, denn für ein homogenes Polynom f vom Grad d gilt

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n)$$

(Übungsaufgabe).

Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset K[X_0, \dots, X_n]$ heißt homogen, falls es von homogenen Polynomen erzeugt wird. Diese dürfen unterschiedliche Grade haben.

Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ mit homogenem f_i definieren wir

$$\tilde{V}(\mathfrak{a}) = \{[a_0 \cdot \dots \cdot a_n] \in \mathbb{P}^n(K) : f_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, r\}.$$

Dann kann man auf $\mathbb{P}^n(K)$ ganz analog wie im Fall $\mathbb{A}^n(K)$ eine Zariski-Topologie definieren, deren abgeschlossene Mengen genau die von $\tilde{V}(\mathfrak{a})$ für homogene Ideale $\mathfrak{a}$ sind.

Ist f ein homogenes Polynom, dann ist die Teilmenge $\tilde{D}(f) = \{P \in \mathbb{P}^n(K) : f(P) \neq 0\} = \mathbb{P}^n(K) \backslash \tilde{V}\big((f)\big)$ offen in $\mathbb{P}^n(K)$. Analog zum affinen Raum kann man jede offene Teilmenge von $\mathbb{P}^n(K)$ als endliche Vereinigung solcher Mengen $\tilde{D}(f)$ schreiben. Insbesondere gilt (Übungsaufgabe)

$$\mathbb{P}^n(K) = \tilde{D}(x_0) \cup \dots \cup \tilde{D}(x_n).$$

Ist $f(X) = \sum a_I X_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n} \in A = K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom in den Unbestimmten $X_1, \dots, X_n$ vom Grad $d = \max\{i_1 + \dots + i_n : a_I \neq 0\}$, so können wir aus f ein homogenes Polynom $\tilde{f}$ in $X_0, X_1, \dots, X_n$ vom Grad d machen, indem wir in jedem Monom eine geeignete X_0-Potenz ergänzen:

$$\tilde{f}(X_0, \dots, X_n) = \sum_{I \subset \mathbb{N}_0^n} a_I X_0^{d-|I|} X_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n}.$$

Wie üblich schreiben wir hier $|I| = i_1 + \dots + i_n$.

Dann ist $f(X_1, \dots, X_n) = \tilde{f}(1, X_1, \dots, X_n)$. Wir betrachten die injektive Abbildung

$$\begin{aligned} j : \mathbb{A}^n(K) &\hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}(K) \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto [1 : a_1 : \ldots : a_n]. \end{aligned}$$

Diese vermittelt eine Bijektion zwischen $\mathbb{A}^n(K)$ und $\tilde{D}(x_0)$. Dann ist $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ genau dann, wenn $\tilde{f}\big(j(a_1, \dots, a_n)\big) = 0$ ist.

Es sei g ein beliebiges homogenes Polynom in $K[X_0, \dots, X_n]$, und $f(X_1, \dots, X_n) = g(1, X_1, \dots, X_n) \in A = K[X_1, \dots, X_n]$.

Dann gilt $\tilde{D}(g) \cap j\big((\mathbb{A}^n(K)\big) = j\big(D(f)\big)$, also ist j stetig.

Da außerdem $\tilde{D}(\tilde{f}) \cap j\big(\mathbb{A}^n(K)\big) = D(f)$ für die Homogenisierung von f gilt, ist j auch offen (bildet also offene Mengen in offene Mengen ab). Somit ist j ein Homöomorphismus.

Definition 5.7 *Für jedes Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r) \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ sei*

$$\mathfrak{a}_{\text{proj}} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_r)$$

das von den Homogenisierungen der f_i erzeugte Ideal in $K[X_0, \ldots, X_n]$.

Lemma 5.8 *Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt $\overline{j\big(V(\mathfrak{a})\big)} = \tilde{V}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})$.*

Beweis : Die Inklusion „$\subset$“ ist klar. Also genügt es, zu zeigen

$$\mathbb{P}^n(K) \backslash \overline{j\big(V(\mathfrak{a})\big)} \subset \mathbb{P}^n(K) \backslash \tilde{V}(\mathfrak{a}_{\text{proj}}).$$

Dazu sei g ein homogenes Polynom in $K[X_0, \ldots, X_n]$ mit

$$\tilde{D}\big((g)\big) \cap j\big(V(\mathfrak{a})\big) = \emptyset.$$

Wir setzen $f(X_1, \ldots, X_n) = g(1, X_1, \ldots, X_n) \in A$. Wie wir oben gesehen haben, ist $\tilde{D}(g) \cap j\big(\mathbb{A}^n(K)\big) = j\big(D(f)\big)$, also folgt

$$D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset$$

und somit $V(\mathfrak{a}) \subset V\big((f)\big)$, also $f^n \in \mathfrak{a}$ für ein $n \geqq 1$.

Also ist $\widetilde{f^n} \in \mathfrak{a}_{\text{proj}}$, woraus

$$\tilde{V}(\mathfrak{a}_{\text{proj}}) \subset \tilde{V}\big((\tilde{f})\big)$$

folgt. Da $\tilde{f}(1, X_1, \ldots, X_n) = g(1, X_1, \ldots, X_n)$ gilt und beide Polynome homogen sind, gibt es ein $m \geqq 0$ mit

$$g = X_0^m \tilde{f}.$$

Also ist $\tilde{V}\big((\tilde{f})\big) \subset \tilde{V}\big((g)\big)$, so dass sich

$$\tilde{D}(g) \subset \mathbb{P}^n(K) \backslash \tilde{V}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})$$

ergibt. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Es sei K ein Körper mit einer Bewertung v. Dann bezeichnen wir mit

$$\text{trop} : T(K) \to \mathbb{R}^n$$

die Abbildung

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \big(v(a_1), \ldots, v(a_n)\big).$$

Sie heißt Tropikalisierungsabbildung und ist ein Gruppenhomomorphismus von $T(K)$ (ausgestattet mit der Multiplikation) in die additive Gruppe $\mathbb{R}^n$. Das Bild von trop ist Γ_v^n.

Unser Ziel ist die Untersuchung der Bilder von Nullstellenmengen der Form $V(\mathfrak{a}) \cap T(K)$ unter trop. Dazu benötigen wir folgendes Lemma. Wir erinnern an die Definition des Restklassenkörpers $R/\mathfrak{M}$ einer Bewertung. Die Restklassenabbildung

$$R \to R/\mathfrak{M}$$

bezeichnen wir auch mit $r \mapsto \overline{r}$.

Lemma 5.9 *Es seien $(w_1, \ldots, w_n) \in (\Gamma_v)^n$ und $(y_1^*, \ldots, y_n^*) \in (K^*)^n$ mit $v(y_i^*) = w_i$ für alle i gegeben. Für gegebenes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in k^n$ betrachten wir*

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{w,\alpha} &= \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in T(K) :\ \mathit{trop}(y_1, \ldots, y_n) = (w_1, \ldots, w_n) \\ &\quad \text{und } \overline{y_i/y_i^*} = \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathfrak{T}_{w,\alpha} \subset T(K)$ dicht in der Zariski-Topologie, das heißt, es gilt

$$\overline{\mathfrak{T}_{w,\alpha}} = T(K).$$

Beweis : Es genügt zu zeigen, dass es für jedes Polynom $0 \neq f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein $y \in \mathfrak{T}_{w,\alpha}$ mit $y \in D(f) \cap T(K)$ gibt, denn dann kann $T(K)$ keine offene Menge im Komplement von $\mathfrak{T}_{w,\alpha}$ enthalten.

Die Restklassenabbildung $R \to k$ ist surjektiv, also finden wir $z_1, \ldots, z_n \in R$ mit $\overline{z_i} = \alpha_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Für

$$y_1 = y_1^* \cdot z_i$$

gilt dann $v(y_i) = v(y_i^*) = w_i$, denn da $\alpha_i \neq 0$ ist, muss $v(z_i) = 0$ sein. Außerdem gilt für alle $y_i^+ \in K^*$ mit $v(y_i^+) > w_i$

$$v(y_i + y_i^+) = v(y_i) = w_i.$$

Da v nicht die triviale Bewertung ist, gibt es unendlich viele solcher Elemente $y_i^+ \in K^*$. Aus $v\left(\frac{y_i^+}{y_i^*}\right) > 0$ folgt ferner $\overline{y_i^+/y_i^*} = 0$.

Daher gilt
$$\overline{\frac{y_i + y_i^+}{y_i^*}} = \overline{z_i} = \alpha_i$$
für alle $i = 1, \ldots, n$. Somit ist für alle solchen y_i^+ das Tupel

$$(y_1 + y_1^+, \ldots, y_n + y_n^+)$$

in $\mathfrak{T}_{w,\alpha}$ enthalten.

Wir zeigen nun mit Inklusion nach n, dass für alle $0 \neq f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ der Schnitt $D(f) \cap \mathfrak{T}_{w,\alpha}$ nicht leer ist.

Ist $n = 1$, so hat f nur endlich viele Nullstellen. Diese können wir also durch geeignete Wahl von y_i^+ vermeiden. Daher gibt es ein $y = y_1 + y_1^+ \in D(f)$.

Ist $n > 1$, so schreiben wir

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{d} h_j X_n^j$$

für geeignete Polynome
$$0 \neq h_j \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}].$$
Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein

$$x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in (K^*)^{n-1}$$

mit $v(x_i) = w_i$ und $x_i/y_i^* = \alpha_i$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$, das außerdem

$$x \in D(h_1 \cdot \ldots \cdot h_d) \subset \mathbb{A}^{n-1}(K)$$

erfüllt. Das Polynom
$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)$$
in einer Variablen ist dann nicht das Nullpolynom, hat also nur endlich viele Nullstellen. Daher finden wir ein y_n^+ wie oben, so dass $y_n + y_n^+$ nicht unter den Nullstellen ist.

Daraus folgt in der Tat

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n + y_n^+) \in \mathfrak{T}_{w,\alpha} \cap D(f).$$

□

Wir wollen nun noch Initialformen von Polynomen einführen.

Dazu sei ab jetzt K ein Körper mit einer Bewertung v, so dass eine Spaltung

$$\psi : \Gamma_v \to K^*$$

der Bewertungsabbildung existiert.

Dies ist nicht unbedingt notwendig. Mit etwas algebraischer Geometrie über Bewertungsringen kann man auf diese Annahme verzichten, siehe [Gu]. In Lemma 4.5 haben wir gesehen, dass diese Annahme für einen algebraisch abgeschlossenen Körper erfüllt ist.

Wir normieren ferner die Bewertung v so, dass $1 \in \Gamma_v$ liegt und setzen $t = \psi(1)$. Für jedes $w \in \Gamma_v$ schreiben wir ab jetzt suggestiv

$$t^w := \psi(w).$$

(Überlegen Sie anhand von Beispielen, wieso.)

Wir bezeichnen wie zuvor mit R den Bewertungsring und mit

$$\begin{array}{ccc} R & \to & R/\mathfrak{M} = k \\ r & \mapsto & \overline{r} \end{array}$$

die Restklassenabbildung in den Restklassenkörper k. Ist

$$f = \sum a_I X^I \in R[X_1, \ldots, X_n]$$

ein Polynom mit Koeffizienten im Bewertungsring, so schreiben wir

$$\overline{f} = \sum_I \overline{a}_I X^I \in k[X_1, \ldots, X_n]$$

für das induzierte Polynom über dem Restklassenkörper. Die Abbildung $f \mapsto \overline{f}$ ist ein Ringhomomorphismus (Übungsaufgabe).

Definition 5.10 *Wir nehmen an, dass v nicht die triviale Bewertung ist. Es sei $w \in \mathbb{R}^n$ ein sogenannter Gewichtsvektor. Dann definieren wir die Initialform von $f = \sum\limits_{I \subset \mathbb{N}_0^n} a_I X^I \in k[X_1, \ldots, X_n]$ als*

$$in_w(f) = \sum_{I \subset \mathbb{N}_0^w} \overline{a_I t^{\langle w, I\rangle - W}} X^I$$

wobei $\langle w, I\rangle = w_1 i_1 + \ldots + w_n i_n$ *und*

$$W = W(f, w) = \min\{v(a_I) + \langle w, I\rangle : a_I \neq 0\}$$

ist. Das ist wohldefiniert, denn für jedes I *mit* $a_I \neq 0$ *ist* $v(a_I t^{\langle w,I\rangle - W}) = v(a_I) + \langle w, I\rangle - W \geqq 0$*, also liegt* $a_I t^{-W} \in R$*. Somit liegt* $in_w(f) \in k[X_1, \ldots, X_n]$*.*

Falls $v(a_I) + \langle w, I\rangle > W$ *ist, ist* $\overline{a_I t^{\langle w,I\rangle - W}} = 0$*. Daher gilt*

$$in_w(f) = \sum_{\substack{I \subset \mathbb{N}_0^n \\ v(a_I) + \langle w,I\rangle = W}} \overline{a_I t^{-v(a_I)}} X^I.$$

Definition 5.11 *Ist* v *die triviale Bewertung auf* K *und* w *in* $\mathbb{R}^n$ *ein Gewichtsvektor, so definieren wir für* f *in* $K[X_1, \ldots, X_n]$ *die Initialform als*

$$in_w(f) = \sum_{I : \langle w,I\rangle = W} a_I X^I$$

mit $W = \min\{\langle w, I\rangle : a_I \neq 0\}$*.*

Beispiel:

1) Sei $f = (t + t^2)X_1 + 2t^2 X_2 + 3t^4 X_3$ in $\mathbb{C}\{\{t\}\}[X_1, X_2, X_3]$.

   Für $w = (0, 0, 0)$ ist $W = \min\{1, 2, 4\} = 1$, also

$$\begin{aligned} \text{in}_w(f) &= \overline{(t + t^2)t^{-1}} X_1 + \overline{2t^2 t^{-1}} X_2 + \overline{3t^4 t^{-1}} X_3 \\ &= X_1 \end{aligned}$$

   Für $w = (4, 2, 0)$ ist

$$W = \min\{1 + 4, 2 + 2, 4\} = 4,$$

   also

$$\begin{aligned} \text{in}_w(f) &= \overline{(t + t^2)} X_1 + \overline{2t^2 t^{-2}} X_2 + \overline{3t^4 t^{-4}} X_3 \\ &= 2X_2 + 3X_3. \end{aligned}$$

2) Es sei $k = \mathbb{Q}$ mit der $2-$adischen Bewertung v_2. Dann ist $k = \mathbb{F}_2$. Es sei $f(X) = X_1 + 2X_2 - 3X_3$. Für $w = (0, 0, 0)$ ist $W = \min\{0, 1, 0\} = 0$ und in$_w(f) = X_1 + X_3$. Analog ist für $w = (1, 0, 2)$ in$_w(f) = X_1 + X_2$.

Lemma 5.12 *Sind* f, g *in* $K[X_1, \ldots, X_n]$*, so gilt* $in_w(f \cdot g) = in_w(f) \cdot in_w(g)$*.*

Beweis : Übungsaufgabe. □

Lemma 5.13 *Es sei $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und $w, v \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle ε' mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ gilt*

$$in_v\big(in_w(f)\big) = in_{w+\varepsilon' v}(f).$$

Auf der linken Seite wenden wir den Operator in_v auf das Polynom

$$in_w(f) \in k[X_1, \ldots, X_n]$$

an, indem wir den Restklassenkörper k mit der trivialen Bewertung versehen.

Beweis : Für $f = \sum a_I X^I$ ist definitionsgemäß

$$in_w(f) = \sum_I a_I t^{\langle w,I\rangle - W} X^I$$

für $W = \min\{v(a_I) + \langle w, I\rangle : a_I \neq 0\}$. Nun sei $W' = \min\{\langle v, I\rangle : I$ erfüllt $v(a_I) + \langle w, I\rangle = W\}$. Dann gilt

$$in_v\big(in_w(f)\big) = \sum_{I:\langle v,I\rangle = W'} \overline{a_I t^{\langle w,I\rangle - W}} X^I = \sum_{I:\langle v,I\rangle = W'} \overline{a_I t^{-v(a_I)}} X^I$$

Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gilt

$$\min\{v(a_I) + \langle w, I\rangle + \langle \varepsilon v, I\rangle\} = W + \varepsilon W'.$$

und

$$\{I : v(a_I) + \langle w + \varepsilon v, I\rangle = W + \varepsilon W'\} = \{I : v(a_I) + \langle w, I\rangle = W \text{ und } \langle v, I\rangle = W'\}.$$

Dann folgt für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ offenbar

$$in_{w+\varepsilon' v}(f) = in_v\big(in_w(f)\big).$$

□

Definition 5.14 *Ist $\mathfrak{a} \subset K[X_1 \ldots X_n]$ ein Ideal und $w \in \mathbb{R}^n$, so definieren wir das zugehörige Initialideal als*

$$in_w(\mathfrak{a}) = \big(in_w(f) : f \in \mathfrak{a}\big) = \left\{ \sum_{i=1}^r g_i in_w(f_i) : r \geqq 1, g_i \in K[X_1, \ldots, X_n], f_i \in \mathfrak{a}. \right\}.$$

Eine Teilmenge $\{f_1, \ldots, f_r\} \subset \mathfrak{a}$ heißt **Gröbnerbasis** von $\mathfrak{a}$, falls gilt

$$in_w(\mathfrak{a}) = \big(in_w(f_1), \ldots, in_w(f_r)\big).$$

Man kann zeigen, dass stets eine solche endliche Gröbnerbasis existiert und diese sogar effektiv berechnen.

Wir untersuchen jetzt den einfacheren Fall der homogenen Ideale.

Lemma 5.15 *Es sei $\mathfrak{a} \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ homogenes Ideal. Wir zerlegen ein $f \in \mathfrak{a}$ in seine homogenen Summanden:*

$$f = \sum_{d=0}^{m} f_d$$

mit f_d homogen vom Grad d. Dann folgt $f_d \in \mathfrak{a}$ für alle d.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Lemma 5.16 *Ist $f = f_0 + \ldots + f_m$ die Zerlegung von $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$ in homogene Summanden f_d vom Grad d, so gilt für jedes $w \in \mathbb{R}^{n+1}$:*

$$in_w(f) = \sum_{d: W(f_d, w) = W(f, w)} in_w(f_d).$$

Beweis : Übungsaufgabe. □

Lemma 5.17 *Sei $\mathfrak{a} \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Ideal und $w \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Dann ist $in_w(\mathfrak{a})$ ebenfalls ein homogenes Ideal und es existiert eine homogene Gröbnerbasis. Es gilt sogar

$$g \in in_w(\mathfrak{a}) \Rightarrow g = in_w(f) \text{ für ein } f \in \mathfrak{a}.$$

Beweis : Es sei $f \in \mathfrak{a}$ und $f = f_0 + \ldots + f_m$ die Zerlegung in homogene Polynome f_d vom Grad d. Nach Lemma 5.15 liegen alle $f_i \in$ $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$. Nach Lemma 5.16 ist

$$\mathrm{in}_w(f) = \sum_{d: W(f, w) = W(f_d, w)} \mathrm{in}_w(f_d),$$

und mit f_d ist auch $\mathrm{in}_w(f_d)$ homogen vom Grad d. Daraus folgt, dass $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ erzeugt ist von allen $\mathrm{in}_w(g)$, wobei g die *homogenen* Polynome von $\mathfrak{a}$ durchläuft. Da

$k[X_0, \ldots, X_n]$ ein noetherscher Ring ist, gibt es endlich viele homogene Polynome $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{a}$ mit

$$\mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = \big(\mathrm{in}_w(g_1), \ldots, \mathrm{in}_w(g_r)\big),$$

also ist $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ homogen und es existiert eine homogene Gröbnerbasis von $\mathfrak{a}$.

Ist $g \in \mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$, so zeigen wir nun, dass $g = \mathrm{in}_w(f)$ für ein $f \in \mathfrak{a}$ ist. Wir schreiben zunächst $g = \sum\limits_{j=1}^{r} h_j \,\mathrm{in}_w(g_j)$ für geeignete $h_j \in k[X_0, \ldots, X_n]$.

Indem wir jedes h_j in seine Monome zerlegen, können wir g als Summe von Termen der Form

$$aX^m \,\mathrm{in}_w(g_j)$$

für $a \in k, m \in \mathbb{N}_0$ und $j = 1, \ldots, r$ schreiben.

Offenbar ist $aX^m \,\mathrm{in}_w(g_j) = \mathrm{in}_w(bX^m g_j)$ für jedes $b \in R$ mit $\overline{b} = a$ (Übungsaufgabe). Mit g_j ist also auch $bX^m g_j \in \mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass v nicht die triviale Bewertung ist. Sind dann $h_1, h_2 \in \mathfrak{a}$ gegeben, die beide homogen vom Grad d sind, so sind auch $\mathrm{in}_w(h_1)$ und $\mathrm{in}_w(h_2)$ homogen vom Grad d.

Wie wählen unter den (unendlich vielen) Elementen in K ein a aus, so dass $\mathrm{in}_w(ah_1 + h_2) = \mathrm{in}_w(h_1) + \mathrm{in}_w(h_2)$ gilt. Zerlegen wir also

$$g = \sum_d \big(\mathrm{in}_w(g_{d,1}) + \ldots + \mathrm{in}_w(g_{d,r_d})\big)$$

in die Summe seiner homogenen Bestandteile vom Grad d, so ist jeder der homogenen Summanden von der Form $\mathrm{in}_w(f_d)$ für ein $f_d \in \mathfrak{a}$. Mit Lemma 5.16 folgt dann die Behauptung.

Den Fall trivialer Bewertung lassen wir als Übungsaufgabe. □

Wir betrachten nun homogene Ideale $\mathfrak{a} \subset S := K[X_0, \ldots, X_n]$. Nach Lemma 5.15 ist dann für jeden Gewichtsvektor $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ auch $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Für jedes $d \geqq 0$ sei $S_d = \bigoplus\limits_{|I|=d} KX^I$ die additive Untergruppe der homogenen Polynome vom Grad d. Offenbar gilt für $f \in S_d$ und $g \in S_{d'}$:

$$f \cdot g \in S_{d+d'}.$$

Also ist S_d invariant unter der Multiplikation mit konstanten Polynomen. Daher ist S_d ein $K-$Untervektorraum des Vektorraums S. Im Gegensatz zu S ist S_d endlichdimensional. (Übungsaufgabe: Berechnen Sie die Dimension von S_d.)

Ist $\mathfrak{a} \subset S$ ein homogenes Ideal, so betrachten wir den Quotientenring $S/\mathfrak{a}$. Mit $(S/\mathfrak{a})_d$ bezeichnen wir das Bild von S_d unter der Quotientenabbildung

$$S \to S/\mathfrak{a}.$$

Lemma 5.18 *Für jedes homogene Ideal $\mathfrak{a} \subset S$ gilt:*

$$S/\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} (S/\mathfrak{a})_d$$

als $K-$Vektorraum.

Beweis : Offenbar sind $S/\mathfrak{a}$ und alle $(S/\mathfrak{a})_d$ $K-$Vektorräume, wenn wir K mit den konstanten Polynomen identifizieren.

Aus $S = \oplus S_d$ folgt zumindest, dass sich jedes Element in $S/\mathfrak{a}$ als Summe von Elementen in endlich vielen $(S/\mathfrak{a})_{d_i}$ schreiben lässt. Wir müssen also nur zeigen, dass die Summe direkt ist. Dafür betrachten wir Restklassen $f_1 + \mathfrak{a}, \ldots, f_r + \mathfrak{a}$ mit $f_i \in S_{d_i}$, für die

$$(f_1 + \mathfrak{a}) + \ldots + (f_r + \mathfrak{a}) = 0 \text{ in } S/\mathfrak{a}$$

gilt. Wir können annehmen, dass die d_i paarweise verschieden sind. Dann folgt $f_1 + \ldots + f_r \in \mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{a}$ ein homogenes Ideal ist, folgt nach Lemma 5.15 $f_i \in \mathfrak{a}$ für alle $i = 1, \ldots, r$ und somit

$$f_i + \mathfrak{a} = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, r.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 5.19 *Es ei $\mathfrak{a} \subset S$ ein homogenes Ideal und $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gewichtsvektor, so dass in$_w(\mathfrak{a})_d$ als $K-$Vektorraum von seinen Monomen erzeugt wird.*

Dann bilden die Monome X^I mit $|I| = d$, die nicht in in$_w(I)$ enthalten sind, eine $K-$Basis von $(S/\mathfrak{a})_d$.

Beweis : Wir betrachten eine Linearkombination der Bilder der $X^I \notin \text{in}_w$ in $(S/\mathfrak{a})_d$, die Null ergibt. Dann existiert ein $f \in \mathfrak{a}$ von der Form

$$f = \sum_{\substack{|I|=d \\ x^I \notin \text{ in}_w(\mathfrak{a})}} c_I X^I.$$

Da f homogen vom Grad d ist, ist in$_w(f)$ auch homogen vom Grad d, also folgt in$_w(f) \in$ in$_w(\mathfrak{a})$. Nach Voraussetzung ist in$_w(\mathfrak{a})$ von den Monomen erzeugt, die in in$_w(\mathfrak{a})$ enthalten sind. Nach Monomvergleich folgt $f = 0$, also $c_I = 0$ für alle I.

Es sei umgekehrt X^I ein Monom vom Grad d mit $X^I \in \operatorname{in}_w(\mathfrak{a})$. Nach Lemma 5.17 existiert ein homogenes Polynom $f_I \in \mathfrak{a}$ mit $\operatorname{in}_w(f_I) = X^I$.

Angenommen, es gilt $\sum\limits_{\substack{|I|=d \\ x^I \in \operatorname{in}_w(\mathfrak{a})}} c_I f_I = 0$ für Koeffizienten $c_I \neq 0$. Wir schreiben $f_I = x^I + \sum\limits_J a_J^{(I)} x^J$, wobei $v(a_J^{(I)}) + \langle w, J\rangle > \langle w, I\rangle$ gilt. Wir wählen ein I_0 mit

$$v(c_{I_0}) + \langle w, I_0\rangle = \min\{v(c_I) + \langle w, I\rangle : |I| = d, x^I \in \operatorname{in}_w(\mathfrak{a})\}.$$

Aus

$$0 = \sum_{\substack{|I|=d \\ x^I \in \operatorname{in}_w(\mathfrak{a})}} c_I f_I = \sum_I c_I x^I + \sum_{I,J} c_I a_J^{(I)} x^J$$

folgt, dass es ein $I_1 \neq I_0$ mit $x^{I_1} \in \operatorname{in}_w(\mathfrak{a})$ geben muss, für das

$$v(c_{I_1}) + v(a_{I_0}^{(I_1)}) \leqq v(c_{I_0})$$

ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, dann könnte man die Bewertung des Koeffizienten vor x^I im obigen Polynom nach unten gegen $v(c_{I_0})$ abschätzen. Daraus folgte

$$\begin{aligned} & v(c_{I_1}) + v(a_{I_0}^{(I_1)}) + \langle w, I_0\rangle \\ \leqq\ & v(c_{I_0}) + \langle w, I_0\rangle \\ =\ & v(c_{I_1}) + \langle w, I_1\rangle \end{aligned}$$

aufgrund der Wahl von I_0.

Dann müsste aber der Term $a_{I_0}^{(I_1)} X^{I_0}$ aus f_{I_1} zu $\operatorname{in}_w(f_{I_1}) = X^{I_1}$ beitragen. Dies ist ein Widerspruch. Also folgt, dass alle $c_I = 0$ sein müssen. Daher sind die Polynome $f_I \in \mathfrak{a} \cap S_d$ mit $\operatorname{in}_w(f_I) = X^I$ linear unabhängig.

Also haben wir gezeigt:

$$\dim(S/\mathfrak{a})_d \geqq |\{I : |I| = d, X^I \notin \operatorname{in}_w \mathfrak{a}\}|$$

und

$$\dim(\mathfrak{a} \cap S_d) \geqq |\{I : |I| = d, X^I \in \operatorname{in}_w \mathfrak{a}\}|$$

Aus $S_d/\mathfrak{a} \cap S_d \simeq (S/\mathfrak{a})_d$ folgt mit der Dimensionsformel die Behauptung. □

Ein Ideal, das von seinen Monomen erzeugt wird, heißt auch monomiales Ideal.

Lemma 5.20 *Es sei* $\mathfrak{a} \subset K[X_0, \dots, X_n]$ *ein homogenes Ideal und* $w \in \mathbb{R}^{n+1}$*. Dann existiert ein* $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ *und ein* $\varepsilon > 0$*, so dass* $in_v\big(in_w(\mathfrak{a})\big)$ *und* $in_{w+\varepsilon v}(\mathfrak{a})$ *monomiale Ideale sind, für die*

$$in_v\big(in_w(\mathfrak{a})\big) \subset \; in_{w+\varepsilon v}(\mathfrak{a})$$

gilt.

Beweis : Für gegebenes $v' \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei $\mathfrak{b}_{v'}$ das Ideal, das von allen Monomen in $\mathrm{in}_{v'}\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$ erzeugt wird.

Da der Polynomring $K[X_0, \dots, X_n]$ noethersch ist, hat die Menge aller $\mathfrak{b}_{v'}$ ein maximales Element $\mathfrak{b}_v$.

Falls $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$ selbst nicht monomial ist, so existiert ein $f \in \mathfrak{a}$, so dass keiner der monomialen Summanden von $\mathrm{in}_v \mathrm{in}_w(f)$ in $\mathfrak{b}_v$ liegt. Für geeignetes $v' \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist

$$\mathrm{in}_{v'}\Big(\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(f)\big)\Big)$$

von einem Monom erzeugt (Übungsaufgabe: Man kann etwa das Newtonpolytop von $\mathrm{in}_v \; \mathrm{in}_w(f)$ betrachten.)

Nach Lemma 5.13 existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\varepsilon' < \varepsilon$

$$\mathrm{in}_{v+\varepsilon' v'}\big(\mathrm{in}_w(f)\big) = \mathrm{in}_{v'}\Big(\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(f)\big)\Big)$$

gilt.

Also ist $\mathrm{in}_{v+\varepsilon' v'}\big(\mathrm{in}_w(f)\big)$ für kleines $\varepsilon' > 0$ ein Monom. Ist nun $X^I \in \mathfrak{b}_v$, so ist X^I ein Monom in $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$, also nach Lemma 5.17 von der Form $X^I = \mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(g_I)\big)$ für ein $g_I \in \mathfrak{a}$. Also sind sowohl $\mathfrak{b}_v$ als auch $\mathrm{in}_{v+\varepsilon' v'}\big(\mathrm{in}_w(f)\big)$in $\mathrm{in}_{v+\varepsilon' v'}\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$ enthalten. Aber das widerspricht der Maximalität von $\mathfrak{b}_v$! Daher ist $\mathfrak{b}_v = \mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$, das heißt, $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$ ist monomial.

Ist $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$ von den Monomen $X^{I_1}, \dots, X^{I_r}$ erzeugt, so wählen wir $f_j \in \mathfrak{a}$ mit $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(f_j)\big) = X^{I_j}$. Nach Lemma 5.13 existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\mathrm{in}_{w+\varepsilon' v}(f_j) = X^{I_j}$ für alle $\varepsilon' < \varepsilon$ und alle $j = 1, \dots, r$ gilt. Für ein solches ε' gilt

$$\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big) \subset \mathrm{in}_{w+\varepsilon' v}(\mathfrak{a})$$

Ein analoges Argument wie oben zeigt, dass $\mathrm{in}_{w+\varepsilon' v}(\mathfrak{a})$ ebenfalls monomial ist. □

Jetzt können wir folgende Verallgemeinerung von Lemma 5.13 zeigen.

Lemma 5.21 *Es sei $\mathfrak{a}$ ein homogenes Ideal in $K[X_0, \dots, X_d]$. Dann gibt es für alle $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$in_v\ in_w(\mathfrak{a}) = in_{w+\varepsilon' v}(\mathfrak{a})$$

für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Beweis : Nach Lemma 5.17 existieren $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{a}$, so dass die Initialformen $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(f_i)\big)$ das Ideal $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$ erzeugen. Nach Lemma 5.13 existiert für jedes $i = 1, \dots, r$ ein $\varepsilon > 0$, so dass für $\varepsilon' < \varepsilon$ $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_{w(f_i)}\big) = \mathrm{in}_{w+\varepsilon' v}(f_i)$ gilt. Wir können ε so klein wählen, dass es für alle $i = 1, \dots, r$ diese Eigenschaft hat. Dann ist für alle $\varepsilon' < \varepsilon$ also

$$\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big) \subset \mathrm{in}_{w+\varepsilon' v}(\mathfrak{a}).$$

Aus dem unten gezeigten Lemma 5.22 folgt, dass für alle $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ und alle $d \geqq 0$ gilt

$$\dim_K(K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a})_d = \dim_k \left(k[X_0, \dots, X_n]/\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})\right)_d.$$

Daraus folgt für alle d

$$\dim_k \Big(\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)\Big)_d = \dim_k \left(\mathrm{in}_{w+\varepsilon' v}(\mathfrak{a})\right)_d$$

und somit $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big) = \mathrm{in}_{w+\varepsilon' v}(\mathfrak{a})$. □

Lemma 5.22 *Sei $\mathfrak{a} \subset K[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Ideal und $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie $d \geqq 0$. Dann gilt $\dim_K(K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a})_d = \dim_k \left(k[X_0, \dots, X_n]/in_u(\mathfrak{a})\right)_d$.*

Beweis : Zu u existiert nach Lemma 5.20 ein $\tilde{v}$ und $\tilde{\varepsilon} > 0$, so dass $\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})$ und $\mathrm{in}_{u+\tilde{\varepsilon}\tilde{v}}(\mathfrak{a})$ monomiale Ideale sind, die

$$\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{in}_{u+\tilde{\varepsilon}\tilde{v}}(\mathfrak{a})$$

erfüllen. Es sei $d \geqq 0$ und $X^I \in \left(\mathrm{in}_{u+\tilde{a}\tilde{v}}(\mathfrak{a})\right)_d \backslash \left(\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})\right)_d$. Nach Lemma 5.19 erzeugen die $X^J \notin \left(\mathrm{in}_{u+\tilde{\varepsilon}\tilde{v}}(\mathfrak{a})\right)_d$ den $K-$Vektorraum $(K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a})_d$. Da $X^I \notin \mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})$ ist, ist X^I nicht in $\mathfrak{a}$ enthalten. Seine Restklasse in $(K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a})_d$ ist also eine nicht-triviale Linearkombination von $X^J \notin \left(\mathrm{in}_{u+\tilde{\varepsilon}\tilde{v}}(\mathfrak{a})\right)_d$ über k. Wir erhalten ein Polynom $f'_I \neq 0$ mit $f'_I \equiv X^I \mod \mathfrak{a}$, also $X^I - f'_I \in \mathfrak{a}$.

Nun ist f'_I eine Linearkombination von Monomen $X^J \notin \ \mathrm{in}_{u+\tilde{\varepsilon}\tilde{v}}(\mathfrak{a})$, also ist auch $\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(f'_I)$ eine Linearkombination solcher Monome über k und somit nicht in dem monomialen Ideal $\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})$. Ferner ist $\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(X^I) = X^I \notin \mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})$, also folgt $\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(X^I - f'_I) \notin \mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})$. Das ist ein Widerspruch zu $X^I - f'_I \in \mathfrak{a}$. Somit haben wir gezeigt, dass

$$\big(\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})\big)_d = \big(\mathrm{in}_{u+\tilde{\varepsilon}\tilde{v}}(\mathfrak{a})\big)_d$$

gilt. Da $\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})$ ein monomiales Ideal ist, können wir Lemma 5.19 auf $\mathrm{in}_u(\mathfrak{a})$ anwenden und erhalten

$$\dim_k \big(k[X_0, \dots, X_n]/\mathrm{in}_{u(\mathfrak{a})}\big)_d = \dim_k \big(k[X_0, \dots, X_n]/\mathrm{in}_{\tilde{v}}\mathrm{in}_{u(\mathfrak{a})}\big)_d.$$

Ferner können wir Lemma 5.19 auf $\mathfrak{a}$ und $u + \tilde{\varepsilon}\tilde{v}$ anwenden und erhalten

$$\dim_K (K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a})_d = \dim_k \big(k[X_0, \dots, X_n]/\mathrm{in}_{u+\tilde{\varepsilon}\tilde{v}(\mathfrak{a})}\big)_d.$$

Insgesamt folgt

$$\dim_K (K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a})_d = \dim_k \big(k[X_0, \dots, X_n]/\mathrm{in}_{u(\mathfrak{a})}\big)_k.$$

□

Aus diesem Lemma folgt die nützliche Tatsache, dass eine Gröbnerbasis eines homogenen Ideals dieses Ideal erzeugt.

6 Tropikalisierung von Hyperflächen

Es sei K ein Körper mit einer Bewertung. Für ein Polynom $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ wird die Nullstellenmenge $V\big((f)\big) \subset \mathbb{A}^n(K)$ auch Hyperfläche genannt. (Sie hat eine Dimension weniger als der umgebende Raum und verhält sich daher wie eine Fläche im dreidimensionalen Anschauungsraum).

Wir betrachten in diesem Kapitel allgemeiner Laurentpolynome in $K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$.

Definition 6.1 *Ist $f = \sum_{I \subset \mathbb{Z}^n} a_I X^I \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$, so definieren wir das zugehörige tropische Polynom trop(f) als*

$$\begin{aligned} \mathit{trop}(f)(w) &= \bigoplus_{I \in \mathbb{Z}^n} v(a_I) \odot w^{\mathcal{I}} \\ &= \min_{I \in \mathbb{Z}^n} \{v(a_I) + \langle w, I \rangle\}, \end{aligned}$$

also ist $\operatorname{trop}(f)(w)$ einfach $W(f,w)$ in der Notation von Kapitel 5! Das tropische Polynom $\operatorname{trop}(f)$ ist eine stückweise affin-lineare, stetige Funktion

$$\operatorname{trop}(f): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Wir wiederholen noch einmal

Definition 1.6 *Es sei F ein tropisches Laurentpolynom in n Variablen. Die tropische Hyperfläche zu F ist definiert als die Menge*

$$\begin{aligned} V(F) &= \{w \in \mathbb{R}^n : \textit{das Minimum in } \operatorname{trop}(f) \textit{ wird mindestens zweimal angenommen}\} \\ &= \{w \in \mathbb{R}^n : \textit{ es gibt } I \neq I' \textit{ in } \mathbb{Z}^n \textit{ mit } v(a_I) + \langle w, I\rangle = v(a_{I'}) + \langle w, I'\rangle \\ &\qquad \leqq v(a_J) + \langle w, J\rangle \textit{ für alle } J \in \mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

$V(F)$ ist also gerade die Menge aller $w \in \mathbb{R}^n$, so dass $\operatorname{trop}(f)$ nicht in einer Umgebung von w linear ist.

Ab jetzt nehmen wir wieder an, dass die Bewertungsabbildung $v : K^* \to \mathbb{R}^n$ eine Spaltung $\psi : \Gamma_v \to K^*$ hat und schreiben $t^w = \psi(w)$ für $t = v(1)$.

Wir betrachten für ein Laurentpolynom $f = \sum a_I X^I \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ und ein $w \in \mathbb{R}^n$ die Initialform

$$\operatorname{in}_w(f) = \sum_{\substack{w: v(a_I) + \langle w, I\rangle \\ = \operatorname{trop}(f)(w)}} \overline{t^{-v(a_I)} a_I} X^I.$$

Das verallgemeinert Definition 5.10 auf Laurentpolynome.

Lemma 6.2 *Ist $f \neq 0$, so gilt*

$$V\big(\textit{trop}(f)\big) = \{w \in \mathbb{R}^n : \textit{in}_w(f)\} \textit{ ist kein Monom in } k[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}].$$

Beweis : Ist $w \in V\big(\operatorname{trop}(f)\big)$, so gibt es $I \neq I'$ mit

$$\begin{aligned} v(a_I) + \langle w, I\rangle &= v(a_{I'}) + \langle w, I'\rangle \\ &= \operatorname{trop}(f)(w). \end{aligned}$$

Da $\overline{t^{-v(a_I)}} a_I$ und $\overline{t^{-v(a_{I'})}} a_{I'}$ nicht verschwinden, besteht $\operatorname{in}_w(f)$ aus mindestens zwei verschiedenen Monomen.

Ist umgekehrt $\operatorname{in}_w(f)$ die Summe von mindestens zwei Monomen zu verschiedenen Indexmengen, so wählen wir zwei von ihnen, sagen wir $\overline{t^{-v(a_I)} a_I} X^I$ und $\overline{t^{-v(a_{I'})} a_{I'}} X^{I'}$ für $I \neq I'$. Dann gilt

$$v(a_I) + \langle w, I\rangle = v(a_{I'}) + \langle w, I'\rangle = \operatorname{trop}(f)(w),$$

also ist $w \in V\big(\operatorname{trop}(f)\big)$. $\square$

Beispiel:

$$f(X_1, X_2) = t^3 X_1^2 + t^2 X_1 X_2 + (t^3 + t) X_2^2 + 5 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[X_1, X_2]$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \text{trop}(f)(w) &= 3 \odot X_1^{\textcircled{2}} \oplus 2 \odot X_1 \odot X_2 \oplus 1 \odot X_2^{\textcircled{2}} \oplus 0 \\ &= \min\{3 + 2w_1, 2 + w_1 + w_2, 1 + 2w_2, 0\} \end{aligned}$$

Ist etwa $w_2 = -\frac{1}{2}$ und $w_1 > -\frac{3}{2}$, so ist $\text{trop}(f)(w) = \min\{3 + 2w_1, 2 + w_1 + w_2, 1 + 2w_2, 0\} = 0$ und $\text{in}_w(f) = X_2^2 + 5$.

Die Bedingung, dass $\text{in}_w(f)$ kein Monom ist, hat eine einfache idealtheoretische Beschreibung.

Lemma 6.3 *Ein Polynom $0 \neq g \in k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ im Laurentpolynomring über einem Körper k ist genau dann kein Monom, wenn $(g) \neq (1)$ ist, das heißt, wenn das zugehörige Hauptideal nicht der ganze Ring ist.*

Beweis : Ist $g = a_I X^I \in k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Monom, betrachten wir für $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ die Indexmenge $-I = (-i_1, \ldots, -i_n) \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $X^{-I} \in k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$, woraus

$$X^{-I} \cdot g = a_I \in (g)$$

folgt. Da $g \neq 0$ ist, ist $a_I \neq 0$, also liegt auch $1 = a_I^{-1} a_I \in (g)$, und somit folgt $(g) = (1) = k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$.

Um die Rückrichtung zu zeigen, beweisen wir zunächst, dass für jeden Ring R gilt:

$(*)$ Ist $f \in R[X, X^{-1}]$ ein Laurentpolynom in einer Variable mit $(f) = (1)$, so ist $f = aX^m$ für ein $a \in R^*$ und ein $m \in \mathbb{Z}$.

Für gegebenes f mit $(f) = (1)$ existiert ein $h \in R[X, X^{-1}]$ mit $fh = 1$. Wir können f schreiben als $f(X) = X^k \tilde{f}(X)$ mit $\tilde{f} \in R[X]$, so dass $\tilde{f}(0) \neq 0$ ist und geeignetem $k \in \mathbb{Z}$.

Analog können wir h schreiben als $h(X) = X^l \tilde{h}(X)$ mit $\tilde{h} \in R[X]$ und $\tilde{h}(0) \neq 0$ sowie geeignetem $l \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $1 = fh = X^{k+l} \tilde{f}\tilde{h}$.

Ist $k + l > 0$, so ergibt sich nach Einsetzen von 0 ein Widerspruch. Ist $k + l < 0$, so ist $X^{-k-l} = \tilde{f}(X)\tilde{g}(X)$, was nach Einsetzen von 0 erneut zum Widerspruch führt.

Also ist $k + l = 0$ und $1 = \tilde{f}\tilde{h}$. Nun sind $\tilde{f}$ und $\tilde{h}$ Polynome in X, daher müssen beide konstant sein. Also folgt $\tilde{f}(X) = a \in R^*$ und $f(X) = aX^m$ wie behauptet. Damit haben wir $(*)$ bewiesen.

Nun zeigen wir mit Induktion nach n, dass aus $(g) = (1)$ für $g \in k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ folgt, dass g ein Monom ist.

Für $n = 1$ folgt das direkt aus $(*)$. Ist $n > 1$, so schreiben wir

$$g = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^i$$

mit $g_i \in k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]$ und wenden $(*)$ auf $R = k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]$ an: Es folgt $g = f X_n^m$ für ein $f \in R^*$ und ein $m \in \mathbb{Z}$. Da $f \in R^*$ ist, gilt $(f) = (1)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist f daher ein Monom in $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Wir wollen die Menge $V\big(\mathrm{trop}(f)\big)$ nun vergleichen mit dem Bild der algebraischen Hyperfläche $V\big((f)\big) \subset T(K)$ unter der Tropikalisierungsabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{trop} : T(K) &\to \mathbb{R}^n \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto \big(v(a_1), \ldots, v(a_n)\big). \end{aligned}$$

Da das Bild von trop in $\Gamma_v^n \subset \mathbb{R}^n$ enthalten ist, also eventuell nicht alle $w \in \mathbb{R}^n$ trifft, müssen wir die Menge $\mathrm{trop}\big(V(f)\big)$ im folgenden Satz noch etwas vergrößern. Wir können jetzt unseren Hauptsatz über tropische Hyperflächen zeigen.

Satz 6.4 *(Satz von Kapranov) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit einer nicht-trivialen Bewertung (etwa der Körper der Puiseuxreihen $\mathbb{C}\big\{\{t\}\big\}$.*

Wir betrachten ein Laurentpolynom $f \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm n}]$. Dann stimmen die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ überein:

(1) die tropische Hyperfläche $V\big(\mathit{trop}(f)\big)$

(2) die Menge $\{w \in \mathbb{R}^n : \mathit{in}_w(f)$ ist kein Monom$\}$

(3) der Abschluss in $\mathbb{R}^n$ von $\mathit{trop}\Big(\big(V(f)\big)\Big)$.

Ist ferner f irreduzibel, also nur trivial in Faktoren zerlegbar, und $w \in \ \mathit{trop}\, V\big((f)\big)$, dann ist

$$\{P \in V\big((f)\big) : \mathit{trop}(P) = w\} \subset V\big((f)\big)$$

dicht in der Zariskitopologie von $V\big((f)\big)$.

Bevor wir den Satz beweisen, betrachten wir das aus Kapitel 3 bekannte Beispiel einer tropischen Geraden:

Beispiel: Es sei $f(X_1, X_2) = X_1 + X_2 + 1 \in K[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]$. Dann ist

$$\text{trop}(f)(w) = \min\{w_1, w_2, 0\}$$

und $V\big(\text{trop}(f)\big)$ ist der Tripod aus Kapitel 3. Wir sehen, dass $\text{in}_w(f)$ ein Monom ist außer für $w = (0,0), w \in \mathbb{R}_+(-1,-1), w \in \mathbb{R}_+(1,0)$ und $w \in \mathbb{R}_+(0,1)$. Setzen wir diese Punkte zusammen, so erhalten wir offenbar denselben Tripod.

Die Nullstellenmenge $V\big((f)\big)$ besteht aus allen $(a_1, a_2) \in (K^*)^2$ mit $a_1 + a_2 + 1 = 0$.

Also ist

$$\text{trop}\, V\big((f)\big) = \big\{\big(v(a_1), v(a_2)\big) : a_1 + a_2 + 1\big\} = \big\{\big(v(a_1), v(a_1+1)\big) : a_1 \in K\big\},$$

denn $v(a_2) = v(-a_1 - 1) = v(a_1 + 1)$.

Dann gibt es folgende Möglichkeiten:

i) $v(a_1) > 0$. Dann ist $v(a_1+1) = 0$, also erhalten wir somit alle Punkte in $\mathbb{R}_+(1,0)$.

ii) $v(a_1) < 0$. Dann ist $v(a_1+1) = v(a_1) < 0$, also erhalten wir somit alle Punkte in $\mathbb{R}_+(-1,-1)$.

iii) $v(a_1) = 0$ und $v(a_1+1) > 0$. Dann erhalten wir alle Punkte in $\mathbb{R}_+(0,1)$.

iv) $(v(a_1) = v(a_1+1) = 0$. Das liefert den Nullpunkt.

Beweis (von Satz 6.4): Die Tatsache, dass die Mengen in (1) und (2) übereinstimmen, haben wir schon in Lemma 6.2 gezeigt.

Sei nun ein $w \in \text{trop}\, V\big((f)\big)$ gegeben. Dann ist $w = \big(v(a_1), \ldots, v(a_n)\big)$ für ein $(a_1, \ldots, a_n) \in T(K)$ mit $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Ist $f = \sum\limits_{I : c_I \neq 0} c_I X^I$, so gilt also $0 = \sum c_I a^I$. Da alle auftretenden $c_I a^I \neq 0$ sind, gilt $v(c_I a^I) \in \mathbb{R}$. Falls das Minimum der endlich vielen Terme $v(c_I a^I)$ nur einmal angenommen wird, so folgt

$$v(\sum c_I a^I) = \min_I \{v(c_I a^I)\}.$$

Das widerspricht der Tatsache, dass $\sum c_I a^I = 0$ ist. Also wird das Minimum aller $v(c_I a^I)$ mindestens zweimal angenommen. Da

$$\begin{aligned} v(c_I a^I) &= v(c_I) + v(a_1)i_1 + \ldots + v(a_n)i_n \\ &= v(c_I) + \langle\big(v(a_1), \ldots, v(a_n)\big), I\rangle \\ &= v(c_I) + \langle w, I\rangle \end{aligned}$$

gilt, liegt w in $V\big(\operatorname{trop}(f)\big)$.

Da $V\big(\operatorname{trop}(f)\big)$ abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ ist, liegt auch der Abschluss von $\operatorname{trop}\Big(V\big((f)\big)\Big)$ in $V\big(\operatorname{trop}(f)\big)$.

Für die andere Inklusion genügt es zu zeigen, dass jedes $w \in \mathbb{R}^n$, so dass $\operatorname{in}_w(f)$ kein Monom ist, im Abschluss von trop$V\big((f)\big)$ liegt.

Nach Voraussetzung ist K algebaisch abgeschlossen und nicht-trivial bewertet. Nach Lemma 4.4 ist daher die Wertegruppe Γ_v dicht in $\mathbb{R}$. Also reicht es zu zeigen, dass jedes $w \in \Gamma_v^n \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\operatorname{in}_w(f)$ kein Monom ist, in trop$V(f)$ liegt. Wir zeigen allgemeiner:

$(*)$ Für $w \in \Gamma_v^n$, so dass $\operatorname{in}_w(f)$ kein Monom ist und jedes $\alpha \in (k^*)^n$ mit $\operatorname{in}_w(f)(\alpha) = 0$ existiert ein $g \in T(K)$ mit $f(y) = 0, \operatorname{trop}(y) = w$ und $\overline{t^{-w_i}y_i} = \alpha_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Wir zeigen nun $(*)$ mit Induktion nach n.

Ist $n = 1$, so ist $f = X^k f_1$ für $f_1 = \sum\limits_{i=0}^{s} c_i X^i$ mit $c_0 = f_1(0) \neq 0$ und $c_s \neq 0$. Dann ist $\operatorname{in}_w(f) = \operatorname{in}_w(X^k)\operatorname{in}_w(f_1)$, also ist auch $\operatorname{in}_w(f_i)$ kein Monom. Können wir zeigen, dass $w = \operatorname{trop}(b)$ für eine Nullstelle $b \in V\big((f_1)\big)$ ist, so folgt $b \in V\big((f)\big)$. Also können wir ohne Einschränkung $f = f_1 = \sum\limits_{i=0}^{s} c_i X^i$ annehmen. Über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K zerlegt sich f als

$$f = \prod_{j=1}^{s}(a_j X - b_j).$$

Also ist $\operatorname{in}_w(f) = \prod\limits_{j=1}^{s} \operatorname{in}_w(a_j X - b_j)$ nach Lemma 6.3. Es sei $\alpha \in k^*$ eine Nullstelle von $\operatorname{in}_w(f)$. Dann gibt es ein j, so dass $\operatorname{in}_w(a_j X - b_j)$ kein Monom ist und ebenfalls die Nullstelle α hat.

Also ist $v(a_j) + w = v(b_j)$ und $\overline{a_j t^{-v(a_j)}\alpha} = \overline{t^{-v(b_j)} b_j}$, das heißt,

$$\alpha = \frac{\overline{t^{-w} b_j}}{a_j}.$$

Wir setzen $y = \frac{b_j}{a_j} \in K^*$. Dann ist $f(y) = 0, v(y) = w$ und $\overline{y t^{-w}} = \alpha$. Wir haben also ein $y \in T(K) = K^*$ gefunden mit $y \in V\big((f)\big)$ und $\operatorname{trop}(y) = w$, das zusätzlich $\overline{t^{-w} y} = \alpha$ erfüllt.

Nun sei $n > 1$ und wir nehmen an, unsere Behauptung gelte in den kleineren Dimensionen.

Wir ordnen f nach X_n-Potenzen:

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^i.$$

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass alle $f_i = c_i X^{I(i)}$ Monome in $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]$ sind. Gegeben sei außer $w \in \Gamma_v^n$ auch ein $\alpha \in (k^*)^n$ mit $\mathrm{in}_w(f)(\alpha) = 0$. Es sei

$$y_i^* = t^{w_i} \text{ für } i = 1, \ldots, n-1.$$

Wir betrachten für $w' = (w_1, \ldots, w_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ die Menge

$$\mathcal{T}_{w',\alpha'} = \{y \in (K^*)^{n-1} = T_{n-1}(K) : \mathrm{trop}(y) = w' \text{ und } \overline{y_i/y_i^*} = \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Nach Lemma 5.8 ist $\mathcal{T}_{w',\alpha'}$ direkt in der Zariskitopologie.

Wir nehmen ein beliebiges $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathcal{T}_{w',\alpha'}$ und betrachten

$$g(X_n) = f(y, X_n) = f(y_1, \ldots, y_{n-1}, X_n) \in K[X_n^{\pm 1}].$$

Also ist

$$g(X_n) = \sum_{i=0}^{d} c_i y^{I(i)} X_n^i.$$

Wir zeigen jetzt zunächst

$$\mathrm{trop}(g)(w_n) = \mathrm{trop}(f)(w)$$

$\mathrm{trop}(g)(w_n)$ ist definitionsgemäß das Minimum aller

$$v(c_i) + v(y^{I(i)}) + w_n \cdot i$$

über $i = 0, \ldots, d$.

Nun ist $\mathrm{trop}(y) = w'$, also ist $v(y_j) = w_j$ und somit $v(y^{I(i)}) = \langle w', I(i) \rangle$ (bitte nachprüfen!).

Also ist $\mathrm{trop}(g)(w_n) = \min_i \{v(c_i) + \langle w, \big(I(i), i\big) \rangle\}$, wobei $\big(I(i), i\big) \in \mathbb{Z}^n$ durch Anhängen von i an $I(i) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ entsteht. Ferner ist

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=0}^{d} c_i X^{I(i)} X_n^i \\ &= \sum_{I=\left(I(i),i\right)} c_i X^{I(i)} X_n^i \end{aligned}$$

mit paarweise verschiedenen $\big(I(i),i\big)\in\mathbb{Z}^n$. Also ist

$$\begin{aligned}\text{trop}(f)(w) &= \min_{I=\big(I(i),i\big)}\{v(c_i)+\langle w,I\rangle\}\\ &= \text{trop}(g)(w_n).\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die zugehörigen Initialformen.

$$\begin{aligned}\text{Es ist in}_w(f) &= \sum_{\substack{i:v(c_i)+\langle w,\big(I(i),i\big)\rangle\\ =\text{trop}(f)(w)}} \overline{t^{-v(c_i)}c_i}X^{I(i)}X_n^i \text{ und}\\ \text{in}_{w_n}(g) &= \sum_{\substack{i:v(c_i)+\langle w',I(i)\rangle+w_i i\\ =\text{trop}(g)(w_n)}} \overline{t^{-v(c_i)-\langle w',I(i)\rangle}c_i y^{I(i)}}X_n^i\\ &= \sum_{\substack{i:v(c_i)+\langle w,\big(I(i)i\big)\rangle\\ =\text{trop}(f)(w)}} \overline{t^{-v(c_i)}c_i t^{-\langle w',I(i)\rangle}y^{I(i)}}X_n^i.\end{aligned}$$

Nun ist $y\in\mathcal{T}_{w,\alpha'}$, also ist $\overline{y_i/y_i^*}=\alpha_i$ für alle $i=1,\dots,n-1$. Wir erinnern daran, dass $y_i^*=t^{w_i}$ gilt. Also ist $\overline{t^{-w_i}y_i}=\alpha_i$ und somit $\overline{t^{-\langle w',I(i)\rangle I(i)}}y=(\alpha')^{I(i)}$, wenn wir Multiindexnotation verwenden.

Daraus folgt

$$\text{in}_{w_n}(g)(X_n)=\text{in}_w(f)(\alpha_i,\dots,\alpha_{n-1},X_n).$$

Da $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ eine Nullstelle von $\text{in}_w(f)$ ist, ist α_n eine Nullstelle von $\text{in}_{w_n}(g)$.

Nach dem Induktionsanfang existiert also ein $y_n\in K^*$ mit $\text{in}_w(f)(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$, $\text{trop}(y_1,\dots,y_n)=w$ $\overline{t^{-w_n}y_n}=\alpha_n$, und $0=g(y_n)=f(y_1,\dots,y_n)$. Mit $y=(y_1,\dots,y_n)\in T(K)$ haben wir dann den gewünschten Vektor gefunden.

Jetzt wollen wir den allgemeinen Fall betrachten. Das Argument des Spezialfalles geht hier nicht durch, da es bei der Entwicklung $f=\sum f_iX_n^i$ Kürzungen zwischen Monomen geben kann, wenn nicht alle f_i Monome sind. Wir verwenden folgenden Trick:

Es sei $\varphi_l : K[X_1^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}]\to K[X_1^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}]$ der (eindeutig bestimmte) $K-$Algebraautomorphismus mit $\varphi_l(X_i)=X_iX_n^{l^i}$ für alle $i=1,\dots,n-1$ und $\varphi_l(X_n)=X_n$.

Ferner sei $\psi_l : T(K)\to T(K)$ die bijektive Abbildung

$$(a_1,\dots,a_n)\mapsto(a_1a_n^l,a_2a_n^{l^2},\dots,a_{n-1}a_n^{l^{n-1}},a_n)$$

Dann ist $\varphi_l(f)(a) = f\big(\psi_l(a)\big)$. Ist $X^I = X_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{n-1}^{i_{n-1}} X_n^{i_n}$ ein Monom in f, so ist $\varphi_l(X^I) = X_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{n-1}^{i_{n-1}} X_n^{i_n + \sum\limits_{j=1}^{n-1} i_j l^j}$.

Man überlegt sich leicht, dass für $I \neq J$ gilt, dass der auftretende Exponent von X_n in $\varphi_l(X^I)$ verschieden von demjenigen in $\varphi_l(X^J)$ ist, wenn l groß genug ist (Übungsaufgabe). Also finden wir nach dem bisher gezeigten angewandt auf

$$\begin{aligned} w^* &= (w_1 - l w_n, w_2 - l^2 w_n, \ldots, w_{n-1} - l^{n-1} w_n, w_n) \\ \text{und } \alpha^* &= (\alpha_1 - \alpha_n^{-l}, \alpha_2 \alpha_n^{-l^2}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha^{-l^{n-1}}, \alpha_n) \end{aligned}$$

ein $y^* \in T(K)$ mit $\varphi_l(f)(y^*) = 0, \text{trop}(y^*) = w^*$ und $\overline{t^{-w^*} y^*} = \alpha^*$.

Wir setzen $y = \varphi_l(y^*)$, dann gilt $0 = \varphi_l(f)(y^*) = f\big(\psi_l(y^*)\big) = y$.

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } v_i(y_i) &= v_i(y_i^* {y_n^*}^{l^i}) \\ &= v_i(y_i^*) + l^i v(y_n^*) \\ &= w_i^* + l^i w_n^* \\ &= w_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

woraus $\text{trop}(y) = w$ folgt.

Analog gilt für $i = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} \overline{t^{-w_i} y_i} &= \overline{t^{w_i}\big(y_i^* (y_n^*)^{l^i}\big)} \\ &= \overline{t^{-w_i^*} y_i^*}\ \overline{t^{-l^i w_n^*} {y_n^*}^{l^i}} \\ &= \overline{t^{-w_i^*} y_i^*}\ \big(\overline{t^{-w_n^*} y_n^*}\big)^{l^i} \\ &= \alpha_i^* {\alpha_n^*}^{l^i} = \alpha_i. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Induktionsbehauptung.

Wir zeigen jetzt noch, dass für jedes irreduzible Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, so dass $\text{in}_w(f)$ kein Monom ist, die folgende Behauptung gilt:

$(**)$ Für jedes $w \in (\Gamma_v)^n \cap$ trop $V\big((f)\big)$ und alle Nullstellen $a \in k^n$ von $\text{in}_w(f)$ ist die Menge

$$\mathcal{Y} = \{y \in V\big((f)\big) : \text{trop}(y) = w, \overline{t^{-w_i} y_i} = \alpha_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

Zariski-dicht in $V\big((f)\big)$.

Dazu betrachten wir wieder zunächst den Spezialfall $f = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i X_n^i$ mit $f_i \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Wir setzen erneut $w' = (w_1, \ldots, w_{n-1})$ und $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.

Dann haben wir gezeigt, dass jedes $y \in \mathcal{T}_{w',\alpha'} = \{y \in T_{n-1}(K): \text{ trop}(y) = w', \overline{t^{w_i} y_i} = \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n-1\}$ zu einer Nullstelle $(y, y_n) = (y_1, \ldots, y_n) \in T(K)$ von f ergänzt werden kann, die trop$(y, y_n) = w$ sowie $\overline{t^{w_n} y_n} = \alpha_n$ erfüllt.

Nach Lemma 5.8 ist $\mathcal{T}_{w',\alpha'}$ eine Zariski-dichte Teilmenge von $T_{n-1}(K)$.

Wir bezeichnen mit

$$\begin{array}{rcl} p: T_n(K) & \to & T_{n-1}(K) \\ (y_1, \ldots, y_n) & \mapsto & (y_1, \ldots, y_{n-1}) \end{array}$$

die Projektionsabbildung. Dann ist $P(\mathcal{Y})$ dicht in $T_{n-1}(K)$, das heißt, für jedes $0 \neq g' \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ schneidet $P(\mathcal{Y})$ die Zariski-offene Menge $D(g') =$

$$\{z \in T_{n-1}(K) : g'(z) = 0\}.$$

Jede Zariski-offene Teilmenge von $V\big((f)\big)$ (in der Relativtopologie) ist von der Form

$$D(g) \cap V\big((f)\big)$$

für ein $g \in K[X_1, \ldots, X_n]$.

Wir wollen zeigen, dass für alle g mit $D(g) \cap V\big((f)\big)$ die Menge

$$D(g) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$$

ist.

Angenommen, g ist ein Polynom in $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\mathcal{Y} \subset V\big((g)\big)$, also $g(y) = 0$ für alle $y \in \mathcal{Y}$.

Wir betrachten das von f und g erzeugte Ideal $(f, g) \cap K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Dann gilt $(f, g) \cap K[X_1, \ldots, X_{n-1}] = (0)$, denn ist $h \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ ein Polynom in (f, g), dann verschwindet h auf allen $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in T_{n-1}(K) = p(\mathcal{Y}) \subset p\big(V(g)\big) \cap V\big((f)\big) = p\Big(V\big((f, g)\big)\Big)$.

Jetzt braucht man etwas Dimensionstheorie für Algebren, um mit der Irreduzibilität von f zu schließen, dass $V\big((f)\big) = V\big((f, g)\big)$ ist.

Daher ist $D(g) \cap V\big((f)\big) = \emptyset$, und die Behauptung ist in unserem Spezialfall gezeigt. Der allgemeine Fall folgt mit demselben Trick wie oben. $\square$

Definition 6.5 *i) Wir nennen einen polyedrischen Komplex $\Sigma \in \mathbb{R}^n$ Γ_v−rational, falls jeder Polyeder in Σ Γ_v−rational im Sinne von Definition 2.11 ist.*

ii) Ein polyedrischer Komplex heißt rein von Dimension d, falls jeder (inklusions-)maximale Polyeder in Σ die Dimension d hat. Dabei ist die Dimension eines Polyeders P definiert als die Dimension seiner linearen Hülle $\langle P \rangle$, die ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

iii) Ist Σ ein polyedrischer Komplex und $d \in \mathbb{N}$, so ist das $d-$Skelett von Σ die Vereinigung aller Seiten von Σ der Dimension $\leqq d$.

Wir wollen nun zeigen, dass für jedes Laurentpolynom $f = \sum_I c_I X^I \in K[X_1^{\pm 1}; X_2^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ die Menge $\text{trop}\Big(V\big((f)\big)\Big)$ die Struktur eines polyedrischen Komplexes besitzt. Dazu betrachten wir das tropische Polynom

$$\text{trop}(f)(w) = \min_I \{v(c_I) + \langle w, I \rangle\}.$$

Definition 6.6 *Das erweiterte Newtonpolytop zu trop(f) ist definiert als die konvexe Hülle*

$$\textit{Newt}_{ext}\big(\textit{trop}(f)\big) = \textit{convex}\{\big(I, v(c_I)\big) : c_I \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dies verallgemeinert die Definition aus Kapitel 3.

Wir betrachten wie in Kapitel 3 den Normalenfächer $\mathcal{N}$ des erweiterten Newtonpolytops im Sinne von Definition 2.15.

Mit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Projektion auf die ersten n Koordinaten.

Wie in Kapitel 3 nennen wir eine Seite F von $\text{Newt}_{\text{ext}}\big(\text{trop}(f)\big)$ „von unten sichtbar", falls der Normalenkegel N_F einen Vektor der Form $\binom{z}{1}$ für ein $z \in \mathbb{R}^n$ enthält.

Definition 6.7 *Die Projektionen $\pi(F)$ für alle von unten sichtbaren Seiten des erweiterten Normalenkegels bilden eine polyedrische Zerlegung des Newtonpolytops Newt$\big($trop$(f)\big)$ = convex$\{I : c_I \neq 0\}$ von trop(f). Wir bezeichnen sie als Newtonzerlegung (oder auch „regular subdivision" in der Literatur.)*

Satz 6.8 *Es sei $f = \Sigma c_I X^I \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$. Die zugehörige tropische Hyperfläche trop $V\big((f)\big)$ ist der Träger eines reinen Γ_v-rationalen polyedrischen Komplexes der Dimension $n-1$ in $\mathbb{R}^n$.*

Dieser Komplex ist das $(n-1)-$Skelett des polyedrischen Komplexes, der dual zur Newtonzerlegung von Newt$\big($trop$(f)\big)$ ist.

Beweis : Wir betrachten eine von unten sichtbare Seite F in $\text{Newt}_{\text{ext}}\big(\text{trop}(f)\big) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann enthält der Normalenkegel N_F einen Punkt der Form $(w, 1)$ für $w \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, F hat Dimension $\geqq 1$. Dann enthält F mindestens zwei Ecken des erweiterten Newtonpolytops, also zwei verschiedene Punkte der Form $v(c_I) + \langle w, I\rangle$ für $c_I \neq 0$. Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned} N_F \;=\; & \{w^* = (w, w_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{ auf } F \text{ wird} \\ & \min\{\langle w^*, y\rangle : y \in \text{ Newt}_{\text{ext}}\big(\text{trop}(f)\big)\} \text{ angenommen}\}. \end{aligned}$$

Also existiert ein $w \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\min\{v(c_I) + \langle w, I\rangle : c_I \neq 0\}$$

mindestens zweimal angenommen wird. Daraus folgt $w \in V\big(\text{trop}(f)\big) = \overline{\text{trop}V\big((f)\big)}$ nach dem Satz von Kapravov.

Wie zuvor bezeichne $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten sowie

$$\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \times \{1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$$

ihre Einschränkung. Dann ist $w = \tilde{\pi}\big((w, 1)\big) \in \tilde{\pi}(N_F)$. Wir haben also gezeigt, dass $\tilde{\pi}(N_F) \subset \overline{\text{trop}V\big((f)\big)}$ ist. Offenbar ist $\tilde{\pi}(N_F)$ ein Γ_v-rationaler Polyeder. Ferner ist $\tilde{\pi}(N_F)$ dual zur Seite $\pi(F)$ der Newtonzerlegung von $\text{Newt}\big(\text{trop}(f)\big)$ (Übungsaufgabe).

Sei umgekehrt ein $w \in \overline{\text{trop}V\big((f)\big)} = V\big(\text{trop}(f)\big)$ gegeben. Dann wird $\min\{\langle w, I\rangle + v(c_I)\}$ mindestens zweimal angenommen. Die Seite in $\text{Newt}_{\text{ext}}(\text{trop}f)$, die von allen Ecken $\big(I, v(c_I)\big)$ aufgespannt wird, an denen dieses Minimum angenommen wird, hat Dimension $\geqq 1$ und ist von unten sichtbar. Ferner ist $w \in \tilde{\pi}(N_F)$.

Also ist $\overline{\text{trop}\big(V(f)\big)}$ der Träger des polyedrischen Komplexes mit den Seiten

$$\tilde{\pi}(N_F) \text{ für von unten sichtbares } F.$$

Dieser ist offenbar rein von Dimension $n - 1$. □

Nun betrachten wir den Spezialfall, dass alle Koeffizienten in f Bewertung Null haben, also in R^* liegen.

Korollar 6.9 *Es sei $f = \Sigma c_I X^I \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Laurentpolynom mit $v(c_I) = 0$ für alle I. Dann ist $\overline{\text{trop}V\big((f)\big)}$ Träger eines $(n-1)-$dimensionalen polyedrischen Fächers in R^n. Dieser Fächer ist das $(n-1)-$Skelett des Normalenfächers von $\text{Newt}\big(\text{trop}(f)\big)$.*

Beweis : In dieser Situation ist

$$\pi : \text{Newt}_{\text{ext}}\big(\text{trop}(f)\big) \xrightarrow{\sim} \text{Newt}\big(\text{trop}(f)\big)$$

ein Isomorphismus von Polyedern und alle Seiten sind von unten sichtbar.

Ist $F \subset \text{Newt}_{\text{ext}}\big(\text{trop}(f)\big)$ eine Seite, dann ist

$$\tilde{\pi}(N_F) = N_{\pi(F)}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Jetzt wollen wir den Satz von Kapranov auf beliebige Nullstellenmengen $V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ verallgemeinern.

Das folgende Beispiel zeigt, dass wir nicht einfach mit beliebigen Erzeugern des Ideals arbeiten dürfen.

Beispiel: Es sei $n = 2, K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ und $\mathfrak{a} = (X + Y + 1, X + 2Y) \subset K[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$. Dann ist $V(\mathfrak{a}) = \{(-2, 1)\}$ ein Punkt in $(K^*)^2$, also ist

$$\text{trop } V(\mathfrak{a}) = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Andererseits ist $\overline{\text{trop } V\big((X + Y + 1)\big)} = V(\min\{X, Y, 0\})$ die bekannte tropische Gerade und $\overline{\text{trop } V(X + 2Y)} = V(\min\{X, Y\}) = \mathbb{R}(1, 1)$.

Also ist

$$\begin{aligned} & \overline{\text{trop } V\big((X + Y + 1)\big)} \cap \overline{\text{trop } V(X + 2Y)} \\ = \; & V(X \oplus Y \oplus 0) \cap V(X \oplus Y) \\ = \; & \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_1 = w_2 \leqq 0\}. \end{aligned}$$

Wählen wir hingegen das Erzeugendensystem

$$\mathfrak{a} = (X + Y + 1, X + 2Y, Y - 1),$$

indem wir das redundante Polynom

$$Y - 1 = (X + 2Y) - (X + Y + 1)$$

ergänzen, so ist trop $V\big((Y - 1)\big) = \{(w_1, 0) : w_1 \in \mathbb{R}\}$, also trop $(X + Y + 1) \cap$ trop $V(X + 2Y) \cap$ trop $(Y - 1) = \text{trop}\big(V(\mathfrak{a})\big)$.

Mit diesem neuen Erzeugendensystem können wir also trop $V(\mathfrak{a})$ als Schnitt von drei tropischen Hyperflächen studieren. Um solche Erzeugendensysteme allgemein zu finden, brauchen wir noch etwas Theorie.

7 Der Gröbnerkomplex

Wir wollen nun einen polyedrischen Komplex definieren, der die polyedrische Struktur auf einer tropischen Hyperfläche verallgemeinert. Dazu nehmen wir wieder an, dass K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit einer Bewertung v ist, wählen eine Spaltung $\psi : \Gamma_v \to K^*$ der Bewertungsabbildung und setzen $t^w = \psi(w)$ für $t = \psi(1)$.

Es sei $\mathfrak{a}$ zunächst ein homogenes Ideal in $K[X_0, \ldots, X_n]$. Für jedes $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist dann das Initialideal $\text{in}_w(\mathfrak{a})$ ebenfalls homogen nach Lemma 5.17.

Definition 7.1 *Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n+1}$ durch $w \sim w'$ genau dann, wenn $in_w(\mathfrak{a}) = in_{w'}(\mathfrak{a})$.*

Mit $C_\mathfrak{a}(w) = \{w' \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{in}_{w'}(\mathfrak{a}) = \text{in}_w(\mathfrak{a})\}$ bezeichnen wir die zugehörige Äquivalenzklasse von w und mit $\overline{C_\mathfrak{a}(w)}$ ihren Abschluss in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beispiel: Es sei $n = 2$ und $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$. Wir betrachten $f = tX_0^3 + t^2X_1^3 + tX_2^3 + X_0X_1X_2$ und $\mathfrak{a} = (f)$. Dann ist

$$\text{in}_{(0,0,0)}(f) = X_0X_1X_2$$

und $\overline{C_\alpha(0,0,0)} = \big\{(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3 : v_0 + v_1 + v_2 \leqq \min\{3v_0 + 1, 3v_1 + 2, 3v_2 + 1\}\big\}$
$= \big\{(v_0, v_1, 0) : v_0 + v_1 \leqq \min\{3v_0 + 1, 3v_1 + 2, 1\}\big\} + \mathbb{R}(1, 1, 1)$.

Proposition 7.2 *In der obigen Situation ist $\overline{C_\mathfrak{a}(w)}$ stets ein Γ_v-rationaler Polyeder, dessen Linearraum $\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$ enthält. Falls $in_w(\mathfrak{a})$ kein monomiales Ideal ist, so existiert ein $w' \in \Gamma_v^{n+1}$, für das $in_{w'}(\mathfrak{a})$ ein monomiales Ideal ist und $\overline{C_\mathfrak{a}(w)}$ ist eine echte Seite von $\overline{C_\mathfrak{a}(w')}$.*

Beweis : Nach Lemma 5.20 existiert ein $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\text{in}_v\big(\text{in}_w(\mathfrak{a})\big)$ ein monomiales Ideal ist, und mit Lemma 5.21 finden wir ein $\varepsilon > 0$, so dass $\text{in}_v\text{in}_w(\mathfrak{a}) = \text{in}_{w+\varepsilon' v}(\mathfrak{a})$ für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ gilt. Wir setzen $w' = w + \varepsilon' v$ für ein solches ε'. Dann ist also

$$\text{in}_{w'}(\mathfrak{a}) = (X^{I_1}, \ldots, X^{I_r}) \subset k[X_0, \ldots, X_n]$$

für geeignete Monome $X^{I_1}; \ldots, X^{I_r}$. Wir wählen $j \in \{1, \ldots, r\}$ und betrachten die Restklasse von X^{I_j} modulo $\mathfrak{a}$. Nach Lemma 5.19 ist $X^{I_j} + \mathfrak{a}$ eine Linearkombination von Monomen X^I für I, die $|I| = |I_j| =: d$ und $X^I \notin \text{in}_{w'}(\mathfrak{a})$ erfüllen. Daher finden wir Koeffizienten $c_{j_I} \in K$ mit

$$g_j := X^{I_j} - \sum_{\substack{I:|I|=d \\ X^I \notin\, \text{in}_{w'}(\mathfrak{a})}} c_{j_I} X^I \in \mathfrak{a}.$$

Daher ist $\mathrm{in}_{w'}(g_j) \in \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$. Somit ist mit X^{I_j} auch $\mathrm{in}_{w'}(\sum c_{j_I} X^I) \in \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$. Da $\mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$ ein monomiales Ideal ist, sind alle monomialen Summanden dieses Polynoms auch in $\mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$. Daher ist $\mathrm{in}_{w'}(\sum c_{j_I} X^I) = 0$ und somit $\mathrm{in}_{w'}(g_j) = X^{I_j}$. Insbesondere ist $g_1, \ldots, g_r$ eine Gröbnerbasis von $\mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$. Wir behaupten nun

$$\overline{C_{\mathfrak{a}}(w')} = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle z, I_j \rangle \leqq v(c_{j_I}) + \langle z, I \rangle \text{ für alle } j = 1, \ldots, r \text{ und alle } I \subset \mathbb{N}_0^n\}.$$

Daraus folgt, dass $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w')}$ ein Γ_v-rationaler Polyeder ist.

Angenommen, $z \in C_{\mathfrak{a}}(w')$, aber eine der Ungleichungen ist nicht erfüllt, es gelte also $\langle z, I_j \rangle > v(c_{j_I}) + \langle z, I \rangle$ für geeignetes j und I. Dann kommt X^{I_j} in $\mathrm{in}_z(g_j)$ nicht mehr vor. Da $z \in C_{\mathfrak{a}}(w')$ liegt, ist $\mathrm{in}_z(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$. Dies ist ein monomiales Ideal, also liegen mit $\mathrm{in}_z(g_j)$ auch alle monomialen Summanden in $\mathrm{in}_z(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$. Das widerspricht der Tatsache, dass die anderen Monome in g_j nicht in $\mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$ liegen. Also liegt $C_{\mathfrak{a}}(w')$ und damit auch sein Abschluss $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w')}$ in der Menge auf der rechten Seite.

Für die umgekehrte Inklusion nehmen wir zunächst an, $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt $\langle z, I_j \rangle < v(c_{j_I}) + \langle z, I \rangle$ für alle j und I. Dann ist $\mathrm{in}_z(g_j) = X^{I_j}$, also folgt $\mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a}) = (X^{I_1}, \ldots, X^{I_r}) \subset \mathrm{in}_z(\mathfrak{a})$.

Nach Lemma 5.22 gilt für alle $d \geqq 0$

$$\dim_k \big(k[X_0, \ldots, X_n]/\mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})\big)_d = \dim_k k[X_0, \ldots, X_n]/\mathrm{in}_z(\mathfrak{a}),$$

also folgt $\mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_z(\mathfrak{a})$ und somit $z \in C_{\mathfrak{a}}(w')$. Durch Übergang zum Abschluss folgt die gewünschte Inklusion.

Jetzt gehen wir zurück zu dem $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, mit dem wir gestartet sind und erinnern uns, dass $w' = w + \varepsilon' v$ und

$$\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big) = \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$$

gilt. Daraus folgt mit Lemma 5.21 $C_{\mathfrak{a}}(w) \subset \overline{C_{\mathfrak{a}}(w')}$. Wir zeigen jetzt noch, dass $C_{\mathfrak{a}}(w)$ eine Seite des Polyeders $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w')}$ ist.

Dazu betrachten wir wieder die

$$g_j = X^{I_j} - \sum_{\substack{|I|=d \\ X^I \notin \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})}} c_{j_I} X^I \in \mathfrak{a}.$$

Wir wissen, dass $\mathrm{in}_{w'}(g_j) = X^{I_j}$ gilt für $w' = w + \varepsilon' v$ mit ε' klein genug.

Da $\mathrm{in}_v \mathrm{in}_w(g_j) \in \mathrm{in}_v \mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$ ist und dies ein monomiales Ideal ist, folgt $\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(g_j)\big) = X^{I_j}$.

Sei nun $z \in C_{\mathfrak{a}}(w)$, das heißt, es gilt $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_z(\mathfrak{a})$. Dann ist

$$\mathrm{in}_v \mathrm{in}_z(g_j) \in \mathrm{in}_v \mathrm{in}_z(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_v \mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a}),$$

also folgt auch

$$\mathrm{in}_v \mathrm{in}_z(g_j) = X^{I_j}.$$

Daher taucht das Monom X^{I_j} im Polynom

$$\mathrm{in}_v\big(\mathrm{in}_w(g_j) - \mathrm{in}_z(g_j)\big)$$

nicht mehr auf.

Da dieses Polynom im monomialen Ideal $\mathrm{in}_v \mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$ liegt, aber eine Linearkombination von Monomen nicht aus $\mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$ ist, muss es verschwinden. Daher folgt $\mathrm{in}_w(g_j) = \mathrm{in}_z(g_j)$.

Für I mit $X^I \notin \mathrm{in}_{w'}(\mathfrak{a})$, so dass das Monom X^I in $\mathrm{in}_w(g_j) = \mathrm{in}_z(g_j)$ übrig bleibt, gilt nach Definition der Initialform

$$\langle w, I\rangle + v(c_{j_I}) = \langle w, I_j\rangle$$

und

$$\langle z, I\rangle + v(c_{j_I}) = \langle z, I_j\rangle.$$

Verschwindet X^I in $\mathrm{in}_w(g_j) = \mathrm{in}_z(g_j)$, so gilt hingegen

$$\langle w, I\rangle + v(c_{j_I}) > \langle w, I_j\rangle$$

und

$$\langle z.I\rangle + v(g_I) > \langle z, I_j\rangle$$

Dabei nennen wir den Träger eines Polynoms f die Menge aller Monome mit nichtverschwindendem Vorfaktor in der monomialen Zerlegung von f.

Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned} C_{\mathfrak{a}}(w) &= \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle z, I\rangle + v(c_{j_I}) = \langle z, I_j\rangle \text{ für } X^I \text{ in } \mathrm{in}_w(g_j) \text{ und} \\ &\quad \langle z, I\rangle + v(c_{j_I}) > \langle z, I_j\rangle \text{ für } X^I \text{ nicht in } \mathrm{in}_w(g_j)\}. \end{aligned}$$

Also ist $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} \langle z, I\rangle + v(c_{j_I}) &= \langle z, I_j\rangle \text{ für } X^I \text{ in } \mathrm{in}_w(g_j) \\ \text{und } \langle z, I\rangle + v(c_{j_I}) &\geqq \langle z, I_j\rangle \text{ für } X^I \text{ nicht in } \mathrm{in}_w(g_j) \end{aligned}$$

gegeben, daher gilt

$$\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)} = \overline{C_{\mathfrak{a}}(w')} \cap \{\langle z, I\rangle + v(c_{j_I}) = \langle z, I_j\rangle \text{ für } X^I \text{ in } \mathrm{in}_w(g_j)\}$$

wie behauptet.

Insbesondere ist $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ ein Γ_v- rationaler Polyeder in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Für jedes homogene Polynom $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$ und jedes $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt für beliebiges $\lambda \in \Gamma_v$

$$\mathrm{in}_w(f) = \mathrm{in}_{w+\lambda\mathbb{1}}(f)$$

für $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (Übungsaufgabe).

Mit Lemma 5.17 folgt daraus $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_{w+\lambda\mathbb{1}}(\mathfrak{a})$. Also enthält $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ mit jedem Punkt z auch $z + \mathbb{R}\mathbb{1}$. Daraus folgt, dass der Linearraum von $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ die Gerade $\mathbb{R}\mathbb{1}$ enthält. □

Da jedes $C_{\mathfrak{a}}(w)$ den Linearraum $\mathbb{R}\mathbb{1}$ enthält, bleibt die polyedrische Struktur enthalten, wenn wir zum $n-$dimensionalen Quotientenraum $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbb{1}$ übergehen.

Wir wollen nun zeigen, dass die $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ einen polyedrischen Komplex im $\mathbb{R}^{n+1}$ bilden.

Da die Mengen $C_{\mathfrak{a}}(w)$ Äquivalenzklassen sind, gilt $\mathbb{R}^{n+1} = \dot{\bigcup} C_{\mathfrak{a}}(w)$.

Falls $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ ein monomiales Ideal ist, so folgt aus Lemma 5.21, dass $\dim C_{\mathfrak{a}}(w) = n+1$ ist.

Der Beweis von Proposition 7.2 zeigt, dass $C_{\mathfrak{a}}(w_1) \subset \overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ genau dann gilt, wenn $C_{\mathfrak{a}}(w_1) \cap \overline{C_{\mathfrak{a}}(w)} \neq \emptyset$ ist. Dies gilt wiederum genau dann, wenn $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_{w_1}\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})\big)$ ist (Übungsaufgabe).

Wir müssen noch nachweisen, dass der Schnitt von zwei Polyedern $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ eine Seite von beiden ist. Dafür brauchen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 7.3 *Für jedes homogene Ideal $\mathfrak{a} \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ gibt es nur endlich viele monomiale Ideale $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$, wobei $w \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Beweis : Gäbe es unendlich viele monomiale Ideale $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$, so würden wir $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ finden mit $\mathrm{in}_{w_2}(\mathfrak{a}) \subsetneqq \mathrm{in}_{w_1}(\mathfrak{a})$ (Übungen). Es sei $X^I \in \mathrm{in}_{w_1}(\mathfrak{a})$. Nach Lemma 5.19

ist die Restklasse $X^I + \mathfrak{a}$ in $(K[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})_d$ für $d = |I|$ eine Linearkombination aus Monomen $X^J \notin \mathrm{in}_{w_1}(\mathfrak{a})$. Also gibt es ein $f_I \in \mathfrak{a}$ der Form $f_I = X^I + \sum\limits_{X^J \notin \mathrm{in}_{w_1}(\mathfrak{a})} c_J X^J$.

Dann liegt $\mathrm{in}_{w_2}(f_I)$ in $\mathrm{in}_{w_2}(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{in}_{w_1}(\mathfrak{a})$. Da dies ein monomiales Ideal ist, liegen auch alle Monome in $\mathrm{in}_{w_2}(f_I)$ in $\mathrm{in}_{w_1}(\mathfrak{a})$. Daher kann keins der Monome $X^J \notin \mathrm{in}_{w_1}(\mathfrak{a})$ überleben und es folgt $X^I = \mathrm{in}_{w_2}(f_I)$. Somit ist $X^I \in \mathrm{in}_{w_2}(\mathfrak{a})$, und die Behauptung folgt. □

Nun brauchen wir noch ein Lemma aus der linearen Algebra.

Lemma 7.4 *Es sei K ein beliebiger Körper mit einer Bewertung v, und $A \in K^{r \times s}$ eine Matrix vom Rang $r \leqq s$. Für jedes $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ gibt es ein $U \in GL_r(K)$ und eine Indexmenge $J = \{l_1, \ldots, l_r\}$, so dass die l_i−te Spalte von UA gerade e_i ist für $i = 1, \ldots, r$ und so dass $v\big((UA)_{ij}\big) + w_j \geqq w_{l_i}$ für alle $j \notin J$.*

Übungsaufgabe: Zeigen Sie dieses Lemma zunächst für den Fall trivialer Bewertung.

Beweis : Für jede Matrix B und jede Menge J von Spaltenindizes schreiben wir B^J für die Untermatrix, die aus den Spalten von B in J besteht. Da A den Rang r hat, gibt es mindestens eine Teilmenge $J \subset \{1, \ldots, s\}$ mit $|J| = r$ und $\det A^J \neq 0$. Wir wählen unter all diesen Teilmengen J eine Menge $J' = \{l_1, \ldots, l_r\}$ aus, für die der Term

$$v(\det A^{\tilde{J}}) + \sum_{j \in \tilde{J}} w_j$$

minimal wird.

Es sei $U = (A^{J'})^{-1} \in Gl_r(K)$. Dann ist $(UA)^{J'} = E_r$.

Nun betrachten wir für $j \notin J$ und $i = 1, \ldots, r$ die Indexmenge $J_{ij} = (J' \backslash \{l_i\}) \cup \{j\}$. Die Matrix $(UA)^{J_{ij}}$ entsteht durch Ersetzen der i−ten Spalte in E_r durch die j−te Spalte von UA. Berechnen wir $\det(UA)^{J_{ij}}$ durch Entwickeln nach der j−ten Spalte, so finden wir $\det(UA)^{J_{ij}} = \pm (UA)_{ij}$. Ferner ist $(UA)^{J_{ij}} = UA^{J_{ij}}$, also folgt

$$\begin{aligned} v\big((UA)_{ij}\big) &= v(\det U) + v(\det A^{J_{ij}}) \\ &= -v(\det A^{J'}) + v(\det A^{J_{ij}}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Minimalitätsbedingung für J' gilt

$$v(\det A^{J'}) + \sum_{l \in J'} w_l \leqq v(\det A^{J_{ij}}) + \sum_{l \in J_{ij}} w_l$$

und somit die gewünschte Ungleichung, wenn alle w_l mit $l \in J' \cap J_{ij}$ abziehen. □

Dieses Lemma wenden wir nun in folgender Situation an. Wir betrachten ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{S} := K[X_0, \ldots, X_n]$. Für jedes $d \in \mathbb{N}$ wählen wir eine $K-$Basis $f_1, \ldots, f_r$ des $K-$Vektorraums $\mathfrak{a}_d = \mathfrak{a} \cap \mathcal{S}_d$, wobei $\mathcal{S}_d$ wie immer den $K-$Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d bezeichnet.

Es sei A_d die $r \times m-$Matrix, die die Koordinaten von $f_1, \ldots, f_r$ bezüglich der Basis $\mathcal{M}_d = \{X^I : |I| = d\}$ von $\mathcal{S}_d$ enthält; das heißt, es gilt

$$f_i = \sum_{|I|=d} (A_d)_{iI} X^I.$$

Jedes $N \subset \mathcal{M}_d$ mit $\#N = r$ liefert eine $r \times r-$Untermatrix A_d^N von A_d, die gerade aus den Spalten von A_d mit Index in N besteht.

Nach Lemma 7.3 gibt es nur endlich viele monomiale Ideale unter den Initialidealen $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ für $w \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir wählen für alle diese monomiale Erzeuger, das sind endlich viele, also finden wir eine obere Schranke D für ihren Grad. Jetzt definieren wir für $d \leqq D$

$$g_d = \sum_{\substack{N \subset \mathcal{M}_d \\ \#N = r}} \det(A_d^N) \prod_{I \in N} x^I.$$

Das ist ein Polynom in $K[X_0, \ldots, X_n]_d$. Wir betrachten jetzt das zugehörige tropische Polynom trop g_d. Dieses ist stückweise affin-linear. Wir betrachten alle $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass trop (g_d) in einer Umgebung von w affin-linear ist. Das ist das Komplement der tropischen Hyperfläche $V\big(\text{trop}(g_d)\big)$. Dies liefert eine Zerlegung des $\mathbb{R}^{n+1}$ in Teilmengen der Form

$$\sigma = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{trop}(g_d)(w) = a + \langle w, I \rangle\}$$

für Koeffizienten $a = v(c_I) \in \mathbb{R}$, so dass $c_I X^I$ ein Monom in g_d ist.

Wir nehmen nur die inklusionsmaximalen dieser Teilengen und erhalten so eine polyedrische Zerlegung des $\mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\text{trop}(g_d)$ auf den einzelnen Polyedern affin-linear ist. Das liefert einen polyedrischen Komplex $\sum\big(\text{trop}(g_d)\big)$ mit Träger $\mathbb{R}^{n+1}$, indem wir alle Seiten zu den Polyedern σ hinzunehmen. Sein $n-$Skelett ist gerade $V\big(\text{trop}(g_d)\big)$.

Satz 7.5 *In der obigen Situation gilt: Falls $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ für jedes $d \leqq D$ im topologischen Innern eines maximalen Polyeders σ_d in der Zerlegung $\sum(\text{trop } g_d)$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ liegt, so ist $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ monomial und es gilt $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)} = \bigcap \sigma_d$.*

Beweis : Es sei $d \leqq D$ und w' im Innern aller σ_d. Das Minimum über alle Terme der Form

$$v(\det A_d^N) + \sum_{I \in N} \langle w, I \rangle$$

für $N \subset \mathcal{M}_d$ mit $\#N = d$ wird nach Voraussetzung nur für ein $\tilde{N} \subset \mathcal{M}_d$ angenommen. Wir wenden Lemma 7.4 auf A_d und den Vektor $\tilde{w} \in \mathbb{R}^m$ mit $\tilde{w}_I = \langle w, I \rangle$ an. Also gibt es ein $U \in Gl_r(K)$ und eine Indexmenge $N = \{I_1, \ldots, I_r\} \subset \mathcal{M}_d$, so dass die Matrix $B = UA$ folgende Eigenschaften hat: $B^J = E_r$ und

$$v(B_{iI}) + \langle w, I \rangle \geqq \langle w, I_i \rangle \text{ für alle } I \notin N.$$

Aufgrund der Wahl von w gilt hier sogar die strikte Ungleichung. Wir setzen für jedes $i = 1, \ldots, r$:

$$\tilde{f}_i = X^{I_i} + \sum_{I \notin N} B_{jI} X^I.$$

Dann gilt also

$$\text{in}_w(\tilde{f}_i) = X^{I_i}$$

und daher $X^{I_i} \in \text{in}_w(\mathfrak{a})_d$, denn $\tilde{f}_i \in \mathfrak{a}$, da seine Koeffizienten durch die $i-$te Zeile von B gegeben werden, welche eine Linearkombination der Zeilen in A ist.

Mit Lemma 5.22 folgt, dass $\text{in}_w(\mathfrak{a})_d$ die $K-$Basis $X^{I_1}, \ldots, X^{I_r}$ besitzt für $N = \{I_1, \ldots, I_r\}$.

Dieselben Überlegungen können wir für jedes w' im Innern aller σ_d anstellen und erhalten, dass $\text{in}_{w'}(\mathfrak{a})_d$ als $K-$Basis die Monome $X^{I_1}, \ldots, X^{I_r}$ besitzt. Daher gilt $\text{in}_w(\mathfrak{a})_d = \text{in}_{w'}(\mathfrak{a})_d$ für alle $d \leqq D$, also aufgrund der Wahl von D sogar

$$\text{in}_w(\mathfrak{a}) = \text{in}_{w'}(\mathfrak{a}),$$

da beides monomiale Ideale sind. Also folgt $w' \in C_{\mathfrak{a}}(w)$.

Wir nehmen umgekehrt an, dass w' nicht im Innern von σ_d liegt. Dann existiert eine $r-$elementige Teilmenge $N' \neq N$ von $\mathcal{M}_d$ mit

$$v(A_d^{N'}) + \sum_{I \in N'} \langle w', I \rangle \leqq v(A_d^{N''}) + \sum_{I \in N''} \langle w', I \rangle$$

für alle $N'' \neq N'$.

Wir können N' als Ecke des Polytops

$$\text{conv} \left\{ \sum_{I \in N''} I : v(A_d^{N''}) + \sum_{I \in N''} \langle w', I \rangle \text{ minimal} \right\}$$

wählen und somit annehmen, dass es ein $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ gibt mit

$$v(A_d^{N'}) + \langle v, \sum_{I \in N'} I \rangle < v(A_d^{N''}) + \langle v, \sum_{I \in N''} I \rangle$$

für alle weiteren N''.

Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ wird dann das Minimum in trop $(g_d)(w' + \varepsilon v)$ nur einmal angenommen.

Jetzt zeigt dieselbe Argumentation wie am Anfang des Beweises, dass das Initialideal $\text{in}_{w'+\varepsilon v}(\mathfrak{a})_d$ von den X^I für $I \in N'$ aufgespannt wird. Nach Lemma 5.21 gilt aber

$$\text{in}_v \text{in}_{w'}(\mathfrak{a}) = \text{in}_{w'+\varepsilon v}(\mathfrak{a})$$

für kleines ε, also kann $\text{in}_{w'}(\mathfrak{a})$ nicht von den Monomen X^I mit $I \in N$ aufgespannt werden. Somit ist $\text{in}_w(\mathfrak{a})_d \neq \text{in}_{w'}(\mathfrak{a})_d$ und daher auch $\text{in}_w(\mathfrak{a}) \neq \text{in}_{w'}(\mathfrak{a})$. Also ist $w' \notin C_{\mathfrak{a}}(w)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Jetzt können wir unser Hauptresultat in diesem Kapitel zeigen.

Satz 7.6 *Es sei $\mathfrak{a} \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Dann bilden die Abschlüsse*

$$\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$$

der Äquivalenzklassen $C_{\mathfrak{a}}(w)$ einen polyedrischen Komplex mit Träger $\mathbb{R}^{n+1}$. Dieser ist rein von der Dimension $(n+1)$ und die $(n+1)-$dimensionalen Polyeder sind genau die $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$, so dass $\text{in}_w(\mathfrak{a})$ ein monomiales Ideal ist.

Beweis : Nach Satz 7.5 sind die maximalen Polyeder in der gemeinsamen Verfeinerung aller polyedrischen Komplexe $\sum \big(\text{trop}(g_d)\big)$ von der Form $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ für ein w, so dass $\text{in}_w(\mathfrak{a})$ monomial ist. Diese gemeinsame Verfeinerung ist ein polyedrischer Komplex. Umgekehrt hat nach Lemma 5.21 für jedes monomiale Ideal $\text{in}_w(\mathfrak{a})$ der Polyeder $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ die volle Dimension $(n+1)$. Daher trifft er das Innere eines maximalen Polyeders in der gemeinsamen Verfeinerung der $\sum \big(\text{trop}(g_d)\big)$. Nach Satz 7.5 stimmt dann $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ mit diesem maximalen Polyeder überein. Also folgt, dass der Schnitt von zwei $(n+1)-$dimensionalen $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ wieder eine Seite ist.

Nach Lemma 7.3 gibt es außerdem nur unendlich viele von ihnen. Aus Proposition 7.2 und ihrem Beweis folgt ferner, dass für beliebiges w die Menge $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ ein Polyeder ist, der eine Seite eines maximal-dimensionalen $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w')}$ bildet. Der Beweis von Proposition 7.2 zeigt auch, dass jede Seite von $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w')}$ von der Form $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ ist. Also folgt die Behauptung. □

Der polyedrische Komplex aus allen $\overline{C_{\mathfrak{a}}(w)}$ heißt auch **Gröbnerkomplex** von $\mathfrak{a}$.

8 Tropische Basen

Analog zum Fall der Hyperebenen wollen wir Punkte in der Tropikalisierung einer Nullstellenmenge $V(\mathfrak{a})$ über ihre Initialideale $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ charakterisieren. Dazu müssen wir mit Initialidealen in Laurentpolynomringen arbeiten.

Definition 8.1 *Es sei $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal. Für jedes $w \in \mathbb{R}^n$ ist das Initialideal $in_w(\mathfrak{a})$ definiert als das Ideal in $k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$, das von allen Initialformen $in_w(f)$ für $f \in \mathfrak{a}$ erzeugt wird.*

Diese Definition ist analog zu derjenigen im Polynomring. Ein wichtiger Unterschied ist allerdings, dass für nicht triviale Ideale viele Initialideale trivial, also $= (1)$ in $k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$, sind.

Die Eigenschaft $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) \neq (1)$ wird in der Beschreibung von trop $V(\mathfrak{a})$ gerade die Eigenschaft „$\mathrm{in}_w(f)$ kein Monom“ ersetzen (siehe Lemma 6.3).

Da sich Initialideale homogener Ideale einfacher verhalten, ist es oft nützlich, zum „projektiven Abschluss“ überzugehen. Damit ist folgendes gemeint.

Ist $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal, so definieren wir

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}} \subset K[X_0, \ldots, X_n]$$

als das Ideal, das von allen Homogenisierungen $\tilde{f}$ für $f \in \mathfrak{a} \cap K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ erzeugt wird. Dabei ist $\tilde{f}(X_0, \ldots, X_n) = \sum_I c_I X_0^{d-|I|} X^I$ für $f = \sum c_I X^I$.

Das verallgemeinert Definition 5.7. Da alle $\tilde{f}$ homogene Polynome sind, ist $\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}}$ ein homogenes Ideal.

Proposition 8.2 *Es sei $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal und $w \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das Initialideal $in_w(\mathfrak{a})$ das Bild von $in_{(0,W)}(\mathfrak{a}_{proj})$ unter dem Einsetzungshomomorphismus*

$$\begin{aligned} \tau : k[X_0, \ldots, X_n] &\to k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}] \\ X_0 &\mapsto 1 \\ X_i &\mapsto X_i \text{ für } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Jedes Element in $in_w(\mathfrak{a})$ hat die Form $X^I g$ für ein $I \subset \mathbb{Z}^n$ und ein $g(X_1, \ldots, X_n) = f(1, X_1, \ldots, X_n)$ für geeignetes $f \in in_{(0,w)}(\mathfrak{a}_{proj})$.

Beweis : Ist $f = \sum c_I X^I \in \mathfrak{a} \cap K[X_1, \ldots, X_n]$, so betrachten wir die Homogenisierung $\tilde{f} = \sum c_I X^I X_0^{d-|I|}$ wie oben. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{trop}(f)(w) &= \min\{v(c_I) + \langle w, I \rangle\} \\ &= \min\{v(c_I) + \langle (0,w), (d-|I|, I) \rangle\} \\ &= \text{trop}(\tilde{f})(0,w). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\text{in}_{(0,w)}(\tilde{f})(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{v(c_I)+\langle w,I\rangle = \text{trop}(f)(w)} \overline{t^{-v(c_I)} c_I} X^I X_0^{d-|I|},$$

also folgt $\text{in}_{(0,w)}(\tilde{f})(1, X_1, \ldots, X_n) = \text{in}_w(f)(X_1, \ldots, X_n)$.

Daraus folgt $\tau(\text{in}_{(0,w)} \mathfrak{a}_{\text{proj}}) \subset \text{in}_w(\mathfrak{a})$.

Definitionsgemäß ist $\text{in}_w(\mathfrak{a})$ von allen $\text{in}_w(f)$ für $f \in \mathfrak{a}$ erzeugt. Da der Laurentpolynomring $k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ noethersch ist, gibt es endlich viele $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{a}$ mit

$$\text{in}_w(\mathfrak{a}) = \big(\text{in}_w(f_1), \ldots, \text{in}_w(f_r)\big).$$

Wenn wir f_i mit einem Monom multiplizieren, wird $\text{in}_w(f_i)$ auch mit einem Monom multipliziert. Da Monome Einheiten in $k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ sind, ändert dies das erzeugte Ideal nicht. Also können wir annehmen, dass $f_1, \ldots, f_r$ Polynome sind. Aus $\text{in}_{(0,w)}(\tilde{f}_i)(1, X_1, \ldots, X_n) = \text{in}_w(f_i)(X_1, \ldots, X_n)$ folgt dann $\text{in}_w(\mathfrak{a}) \subset \tau\big(\text{in}_{(0,w)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})\big)$. Den Zusatz zeigt man mit ähnlichen Argumenten (Übungsaufgabe). □

Wir benötigen außerdem folgende Beobachtungen über initiale Ideale im Laurentpolynomring.

Lemma 8.3 *Es sei $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal und $w \in \mathbb{R}^n$.*

i) Ist $g \in in_w(\mathfrak{a})$, so ist $g = in_w(h)$ für ein $h \in \mathfrak{a}$.

ii) Falls es ein $v \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $in_v in_w(\mathfrak{a}) = in_w(\mathfrak{a})$, so ist $in_w(\mathfrak{a})$ ein homogenes Ideal, wenn wir die Graduierung auf dem Polynomring durch $deg(X_i) = v_i$ definieren.

iii) Für $f, g \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ist $in_w(fg) = in_w(f) in_w(g)$.

Beweis :

i) Ist $g \in \mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$, so existiert nach Proposition 7.2 ein $f \in \mathrm{in}_{(w,0)}(\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}})$ mit $g(X_1, \dots, X_n) = X^I f(1, X_1, \dots, X_n)$. Da $\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}}$ ein homogenes Ideal ist, gibt es nach Lemma 5.17 ein $h \in \mathfrak{a}_{\mathrm{proj}}$ mit $\mathrm{in}_{(0,w)}(h) = f$. Dann ist $X^I h(1, X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{a}$ mit $\mathrm{in}_w\big(X^I h(1, X_1 \dots X_n)\big) = g$.

ii) Falls $\mathrm{in}_v \mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = \mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ gilt, so betrachten wir Erzeuger des Ideals $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ in $\mathrm{in}_v \mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$, also von der Form $\mathrm{in}_v(g_i)$ für $g_i \in \mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$. Ist $g_i = \sum a_I X^I \in k[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$, so ist
$$\mathrm{in}_v(g_i) = \sum_{\langle v, I \rangle = w} a_I X^I$$
für $w = \min\{\langle v, I \rangle : a_I \neq 0\}$.

Versehen wir also X_i mit dem Grad v_i, so hat jedes Monom in $\mathrm{in}_v(g_i)$ den Grad $\langle v, I \rangle = w$. Daher ist $\mathrm{in}_v(g_i)$ in dieser Graduierung homogen.

iii) Übungsaufgabe.

□

Definition 8.4 *Es sei $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ für einen Körper K mit einer Bewertung v, so dass eine Spaltung $\psi : \Gamma_v \to K^*$ der Bewertungsabbildung existiert. Dann heißt ein endliches Erzeugendensystem*
$$\mathcal{T} \subset \mathfrak{a}$$
***tropische Basis** von $\mathfrak{a}$, falls für jedes $w \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$in_w(\mathfrak{a}) = (1)$ genau dann, wenn eines der $in_w(f)$ für $f \in \mathcal{T}$ eine Einheit ist.

Beispiel: Ist $f \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$, dann ist die Einpunktmenge $\{f\}$ eine tropische Basis für das Hauptideal (f). Falls nämlich $\mathrm{in}_w\big((f)\big) = (1)$ ist, so gibt es nach Lemma 8.3 i) ein $h \in (f)$ mit $\mathrm{in}_w(h) = 1$. Also ist $h = f \cdot g$ für ein $g \in [X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$, woraus $1 = \mathrm{in}_w(f \cdot g) = \mathrm{in}_w(f)\mathrm{in}_w(g)$ folgt. Somit ist auch $\big(\mathrm{in}_w(f)\big) = 1$.

Satz 8.5 *Es sei K ein Körper mit einer Bewertung v, die eine Spaltung besitzt. Dann hat jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ eine tropische Basis.*

Beweis : Dafür brauchen wir den Gröbnerkomplex aus dem letzten Kapital. Wir betrachten das homogene Ideal $\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}} \subset K[X_0, \dots, X_n]$. Nach Satz 7.6 besteht der zugehörige Gröbnerkomplex aus endlich vielen Polyedern $\overline{C_{\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}}}(\tilde{w})}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nach Proposition 7.2 enthält $C_{\mathfrak{a}_{\text{proj}}}(\tilde{w})$ einen Vektor der Form $(0, w) \in \mathbb{R}^{n+1}$, denn der Linearraum von $\overline{C_{\mathfrak{a}_{\text{proj}}}(\tilde{w})}$ enthält $\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$. Definitionsgemäß ist $\text{in}_{\tilde{w}}(\mathfrak{a}) = \text{in}_{(0,w)}(\mathfrak{a})$ und

$$C_{\mathfrak{a}_{\text{proj}}}(\tilde{w}) = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{in}_u(\mathfrak{a}) = \text{in}_{(0,w)}(\mathfrak{a})\}.$$

Nun sei $w \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass

$$\text{in}_w(\mathfrak{a}) = (1)$$

gilt. Dann ist nach Proposition 8.2

$$\mathcal{T}\big(\text{in}_{(0,w)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})\big) = (1).$$

Also existiert nach Lemma 6.3 ein Monom

$$X^I \in \text{in}_{(0,w)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}}).$$

Wie im Beweis von Proposition 7.2 finden wir ein $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\text{in}_v\text{in}_{(0,w)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}}) = \text{in}_{v+\varepsilon'(0,w)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})$$

für alle $\varepsilon' < \varepsilon$ ein monomiales Ideal ist.

Wir setzen $w' = v + \varepsilon'(0, w)$. Dann ist $X^I \in \text{in}_{w'}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})$, also existiert nach Lemma 5.19 ein Element f der Form

$$f = X^I - g \in \mathfrak{a}_{\text{proj}},$$

wobei kein Monom im Träger von g in $\text{in}_{w'}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})$ liegt. Ist $(0, w_1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nun ein weiterer Punkt in $C_{\mathfrak{a}_{\text{proj}}}(\tilde{w})$, so ist $\text{in}_{(0,w_1)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}}) = \text{in}_{(0,w)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})$, also $\text{in}_v\text{in}_{(0,w_1)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}}) = \text{in}_{w'}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})$, woraus wegen $X^I \in \text{in}_{(0,w_1)}(\mathfrak{a}_{\text{proj}})$ auch $\text{in}_{(0,w_1)}(f) = X^I$ folgt. Für $f_1(X_1 \dots X_n) = f(1, X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{a}$ folgt also, dass $\big(\text{in}_{w_1}(f_1)\big) = (1)$ in $k[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ ist.

Nun definieren wir $\mathcal{T}$ als Vereinigung einer endlichen Erzeugermenge von $\mathfrak{a}$ und der Menge aller oben konstruierten $f_1 \in \mathfrak{a}$ zu den Seiten des Gröbnerkomplexes. Dann ist $\mathcal{T}$ ein endliches Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$. Ist $w \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\text{in}_w(\mathfrak{a}) = (1)$ in $k[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$, so betrachten wir $C_{\mathfrak{a}_{\text{proj}}}(0, w)$.

Das Laurentpolynom $f_1 \in \mathfrak{a}$ zu dieser Seite erfüllt nach Konstruktion $\text{in}_w(f_1) = (1)$. Daraus folgt die Behauptung. □

9 Tropikalisierung von Nullstellenmengen

Es sei K ein Körper mit einer Bewertung v, die eine Spaltung besitzt. Wir betrachten ein Ideal $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ im Laurentpolynomring und seine Nullstellenmenge

$$V(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in (K^*)^n = T(K) : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}.$$

Wir erinnern an die Tropikalisierungsabbildung

$$\begin{array}{rrcl} \text{trop}: & T(K) & \to & \mathbb{R}^n \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & \big(v(a_1), \ldots, v(a_n)\big). \end{array}$$

Unser nächstes Ziel ist die Untersuchung von trop $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}^n$, genauer gesagt (wie im Hyperebenenfall) die Untersuchung des Abschlusses

$$\overline{\text{trop } V(\mathfrak{a})} \subset \mathbb{R}^n$$

in der reellen Topologie.

Definition 9.1 *Wir definieren die Tropikalisierung von $X = V(\mathfrak{a})$ durch*

$$X_{trop} = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V\big(trop(f)\big) \subset \mathbb{R}^n.$$

In dieser Definition betrachten wir den Schnitt über eine unendliche Teilmenge, was oft umständlich ist. Hier erweisen sich tropische Basen als nützlich.

Proposition 9.2 *Ist $\mathcal{T}$ eine tropische Basis von $\mathfrak{a}$, so gilt für $X = V(\mathfrak{a})$:*

$$X_{trop} = \bigcap_{f \in \mathcal{T}} V(trop\ f).$$

Beweis : Es gilt trivialerweise

$$\bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V\big(\text{trop}(f)\big) \subset \bigcap_{f \in \mathcal{T}} V\big(\text{trop}(f)\big).$$

Ist $w \in \bigcap_{f \in \mathcal{T}} V\big(\text{trop}(f)\big)$, so ist nach dem Satz von Kapronov (Satz 6.4) für jedes $f \in \mathcal{T}$ das Laurentpolynom $\text{in}_w(f)$ kein Monom. Also ist nach Definition 8.4 $\text{in}_w(\mathfrak{a}) \neq (1)$. Daher ist für jedes $g \in \mathfrak{a}$ die Initialform $\text{in}_w(g)$ kein Monom, woraus $w \in V\big(\text{trop}(g)\big)$ folgt. $\square$

Proposition 9.3 *Für $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ sei wieder $X = V(\mathfrak{a}) \subset T(K)$. Dann ist*

$$X_{trop} = \{w \in \mathbb{R}^n : in_w(\mathfrak{a}) \neq (1)\}.$$

Beweis : Es ist $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a}) = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{in}_w(\mathfrak{a})$ eine Einheit und somit ein Monom enthält. Nach Lemma 6.3 ist das äquivalent dazu, dass es ein $g \in \mathfrak{a}$ gibt mit $\mathrm{in}_w(g)$ ein Monom. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir wollen nun zeigen, dass diese Menge X_{trop} auch mit dem Abschluss von $\mathrm{trop}(X)$ übereinstimmt. Wie im Beweis des Satzes von Kapranov geschieht der entscheidende Schritt hier durch ein Induktionsargument, das wir jetzt vorbereiten.

Wir benötigen für dieses Induktionsargument den Begriff der Dimension einer Nullstellenmenge.

Definition 9.4 *Für jeden noetherschen Ring R definieren wir die Krulldimension $\dim R$ als die maximale Länge d einer echten aufsteigenden Kette*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d$$

von Primidealen in R.

Beispiel:

i) Ist R ein Körper, so ist $\dim R = 0$.

ii) $\dim \mathbb{Z} = 1$.

iii) $\dim K[X] = 1$ für einen Körper K.

Ab jetzt sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 9.5 *Ist $\mathfrak{a} \subset R$ für $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ oder $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal, so definieren wir die Dimension von $V(\mathfrak{a})$ als die Krulldimension von*

$$R/\mathfrak{a}.$$

Mit anderen Worten: Die Dimension von $K(\mathfrak{a})$ ist die maximale Länge einer Kette von Primidealen

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d \subset R.$$

Lemma 9.6 *Die Dimension einer Nullstellenmenge $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^n(K)$ ist die maximale Länge d einer Kette*

$$X_0 \subsetneqq X_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_d \subset V(\mathfrak{a})$$

von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^n(K)$ (im Sinne von Definition 5.5).

Beweis : Dies folgt aus der Tatsache, dass irreduzible abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^n(K)$ gerade die Teilmengen der Form

$$X = V(\mathfrak{p})$$

für $\mathfrak{p} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Primideal sind. □

Ist $\mathfrak{p} \subset R$ für $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ oder $R = K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Primideal, so ist $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring. Mit Quot $(R/\mathfrak{p})$ bezeichnen wir seinen Quotientenkörper. Dieser ist eine Körpererweiterung von K.

Definition 9.7 *Ist L/K eine Körpererweiterung, so definieren wir den Transzendenzgrad $trdeg_K(F)$ als die maximale Kardinalität einer algebraisch unabhängigen Teilmenge von F. Dabei ist eine Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_s\} \subset F$ algebraisch unabhängig über K, falls der natürliche Einsetzungshomomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} K[X_1, \ldots, X_s] & \to & F \\ f(X_1, \ldots, X_s) & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_s) \end{array}$$

injektiv ist.

Beispiel:

i) Ist F/K eine algebraische Körpererweiterung, so gilt $\text{trdeg}_K(F) = 0$

ii) $\text{trdeg}_K\big(K(X_1, \ldots, X_n)\big) = n$, wobei $K(X_1, \ldots, X_n) = \text{Quot}\, K[X_1, \ldots, X_n]$ ist.

Satz 9.8 *Ist $\mathfrak{p} \subset R$ für $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ oder $R = K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Primideal, so ist*

$$\dim V(\mathfrak{p}) = \text{trdeg}_K(\text{Quot}\ R/\mathfrak{p}).$$

Beweis : Einen Beweis finden Sie in vielen Lehrbüchern zur Algebraischen Geometrie. Wir können diesen Punkt in den Übungen vertiefen. □

Wir bezeichnen ab jetzt mit $T^n(K) = (K^*)^n \subset \mathbb{A}^n(K)$ den $n-$dimensionalen Torus. Wir nennen eine Abbildung

$$\psi : T^n(K) \to T^m(K)$$

monomial, falls es normierte Monome $\mu_1, \dots, \mu_m$ in $K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ gibt, so dass

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \big(\mu_1(a_1, \dots, a_n), \dots, \mu_m(a_1, \dots, a_n)\big)$$

gilt.

Ist $\psi : T^n(K) \to T^m(K)$ eine monomiale Abbildung $\psi = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, so definieren wir die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \text{trop}(\psi) : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \ \text{ durch} \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto & \big(\text{trop } \mu_1(v_1, \dots, v_n), \dots, \text{trop } \mu_m(v_1, \dots, v_n)\big) \end{array}$$

Da $\mu_i = X^{I(i)}$ ein normiertes Monom ist, gilt einfach trop $\mu_i(v) = \langle v, I \rangle$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T^n(K) & \xrightarrow{\psi} & T^m(K) \\ \text{trop} \downarrow & & \downarrow \text{trop} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{trop } \psi} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

kommutativ.

Ist $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix über $\mathbb{Z}$, so definiert M eine natürliche monomiale Abbildung

$$\psi = \psi_M : T^n(K) \to T^n(A)$$

durch

$$\begin{array}{rcl} \mu_i(a_1, \dots, a_n) & = & a_1^{m_{i_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{m_{i_n}} \\ & = & \prod_{j=1}^{n} a_j^{m_{i_j}}. \end{array}$$

Dann ist trop $(\psi_M) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ einfach die Linksmultiplikation mit der Matrix M. Ist $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, so ist trop (ψ_M) also ein linearer Isomorphismus.

Satz 9.9 *Es sei $\mathfrak{p} \subset K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ ein Primideal und $X = V(\mathfrak{p}) \subset T^n(K)$.*

Angenommen $\dim X \leqq m$. Dann gibt es ein $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, so dass die zugehörige bijektive monomiale Abbildung $\psi = \psi_M : T^n(K) \to T^n(K)$ folgende Eigenschaft hat: Ist $\pi : T^n(K) \to T^m(K)$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten und $\psi_0 = \pi \circ \psi$:

$T^n(K) \to T^m(K)$, so ist $\psi_0(X)$ Zariski abgeschlossen mit $\dim \psi_0(X) = \dim(X)$. Außerdem kann ψ so gewählt werden, dass für vorgegebene $m-$dimensionale Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ von $\mathbb{R}^n$

$$\textit{Kern } (\textit{trop } \psi_0) \cap W_i = 0$$

für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt.

Beweis : Falls $\dim X = n$ ist, können wir einfach die Identität auf $T^n(K)$ nehmen. Also können wir $\dim X < n$ annehmen.

Mit Hilfe eines Induktionsargumentes genügt es, die Behauptung für $m = n-1$ zu zeigen. Wir betrachten erneut die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi_l : T^n(K) & \to & T^n(K) \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & (a_1 a_n^l, a_2 a_n^{l^2}, a_3 a_n^{l^3}, \ldots, a_{n-1} a_n^{l^{n-1}}, a_n) \end{array}$$

aus dem Beweis von Satz 6.4.

Diese ist offenbar monomial und induziert von der $n \times n-$Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & l \\ & 1 & & & l^2 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & l^{n-1} \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{Z}).$$

Wir wählen l so groß, dass für ein Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_r$ von $\mathfrak{p}$ gilt, dass jedes Polynom

$$f_i(X_1 X_n^l, X_2 X_n^{l^2}, \ldots, X_{n-1} X_n^{l^{n-1}}, X_n)$$

monomiale Koeffizienten in $K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ hat, wenn wir es nach X_n entwickeln (also als Element in $K[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$ darstellen).

Es sei $\varphi_l : K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}] \to K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ wie im Beweis von Satz 6.4 der Einsetzungshomomorphismus mit

$$X_1 \mapsto X_1 X_n^l, X_2 \mapsto X_2 X_n^2, \ldots, X_{n-1} \mapsto X_{n-1} X_n^{l^{n-1}}, X_n \mapsto X_n.$$

Dann ist φ_l ein Isomorphimus, also ist $\mathfrak{q} = \varphi_l(\mathfrak{p}) \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Primideal mit $\psi_l V(\mathfrak{q}) = V(\mathfrak{p})$.

Also ist $\psi_l^{-1} V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{q})$ für die monomiale Umkehrabbildung ψ_l^{-1} von ψ_l, die zur Matrix $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z})$ gehört.

Wir definieren nun

$$\psi = \pi \circ \psi_l^{-1} : T^n(K) \to T^{n-1}(K),$$

wobei π die Projektion auf die ersten $n-1$ Koordinaten ist. Dann gilt

$$\pi\big(V(\mathfrak{q})\big) = V(\mathfrak{q} \cap K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]),$$

wie man aufgrund der speziellen Gestalt eines Erzeugendensystems für $\mathfrak{q}$ direkt zeigen kann.

Also folgt $\psi\big(V(\mathfrak{p})\big) = V(\mathfrak{q} \cap K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]$.

Wir betrachten die $K-$Algebren

$$K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]/\mathfrak{q} \cap K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}] \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{q}.$$

Da $\mathfrak{q}$ nach Definition ein normiertes Polynom in X_n mit Koeffizienten in $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]$ enthält, ist die zugehörige Erweiterung der Quotientenkörper algebraisch. Also haben beide Quotientenkörper denselben Transzendenzgrad über K, woraus

$$\dim V(\mathfrak{q}) = \dim \pi\big(V(\mathfrak{q})\big),$$

also auch

$$\dim V(\mathfrak{p}) = \dim \psi\big(V(\mathfrak{p})\big)$$

folgt. Definitionsgemäß ist

$$\text{trop}(\pi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$$

die Komposition der Multiplikation $M^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Projektion auf die ersten $n-1$ Komponenten. Der Kern dieser Abbildung ist offenbar die Gerade

$$\mathbb{R} \cdot (l, l^2, \ldots, l^{n-1}, 1) \subset \mathbb{R}^n.$$

Wenn wir endlich viele $(n-1)-$dimensionale Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ vorgeben, so finden wir ein $l > 0$, sodass diese Gerade alle W_i nur in 0 trifft (wieso?).

Indem wir also l eventuell vergrößern, können wir auch die Zusatzbedingung erfüllen. □

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0). \end{aligned}$$

Offenbar ist Kern $\lambda = \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$.

Satz 9.10 *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit einer Bewertung $v, \mathfrak{p} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Primideal und $X = V(\mathfrak{p})$. Dann stimmen folgende drei Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ überein:*

i) $\overline{\textit{trop}(X)}$

ii) $\{w \in \mathbb{R}^n : \textit{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)\}$

iii) X_{trop}.

Diese Menge ist außerdem Träger eines Γ_v-rationalen polyedrischen Komplexes Σ, der das Bild eines Unterkomplexes des Gröbnerkomplexes von $\mathfrak{p}_{proj}$ unter λ ist. Jeder maximale Polyeder in Σ hat Dimension $\leqq \dim(X)$.

Beweis : Die Übereinstimmung von ii) und iii) haben wir bereits in Proposition 9.3 gezeigt. Ist $(a_1, \ldots, a_n) \in X = V(\mathfrak{p})$, so gilt für jedes $f \in \mathfrak{p}$, dass $f(a_v, \ldots, a_n) = 0$ ist. Also ist $(a_1 \ldots a_n) \in V\big((f)\big)$ und somit nach dem Satz von Kapranov 6.4 in $V\big(\text{trop}(f)\big)$ enthalten. Daher gilt

$$\text{trop}(X) \subset X_{\text{trop}}$$

nach Definition 9.1. Nach Proposition 9.2 ist X_{trop} ein endlicher Schnitt von abgeschlossenen Teilmengen, also abgeschlossen. Daher gilt auch $\overline{\text{trop}(X)} \subset X_{\text{trop}}$.

Wir betrachten nun die Menge

$$\{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)\}.$$

Das homogene Ideal $\mathfrak{p}_{\text{proj}}$ liefert den Gröbnerkomplex mit den Seiten $\overline{C_{\mathfrak{p}_{\text{proj}}}(\tilde{w})}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir bezeichnen sein Bild unter der linearen Abbildung λ mit Σ'.

Nach Proposition 7.2 enthält der Linearraum jeder Seite $\overline{C_{\mathfrak{p}_{\text{proj}}}(\tilde{w})}$ die Gerade $\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$. Daher bestehen die Seiten von Σ' gerade aus den Bildern der $\overline{C_{\mathfrak{p}_{\text{proj}}}(\tilde{w})}$, und Urbilder von Seiten in Σ' sind Seiten im Gröbnerkomplex.

Nach Proposition 8.2 ist $\text{in}_w(\mathfrak{p}) = 1$ genau dann, wenn $\tau(\text{in}_{(0,w)}\mathfrak{p}_{\text{proj}}) = 1$ ist. Da τ der Einsetzungshomomorphismus ist, der X_0 auf 1 abbildet, ist letzteres äquivalent dazu, dass ein Element der Form $p(X_0) \cdot X_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n}$ mit $p \in K[X_0]$ und $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ in $\text{in}_{(0,w)}(\mathfrak{p}_{\text{proj}})$ existiert. Da $\text{in}_{(0,w)}\mathfrak{p}_{\text{proj}}$ nach Lemma 5.17 homogen ist, liegt nach Lemma 5.15 ein Monom in $\text{in}_{(0,w)}\mathfrak{p}_{\text{proj}}$. Wir setzen $\Gamma = \{\tilde{w} \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{in}_{\tilde{w}}(\mathfrak{p}_{\text{proj}})$ enthält kein Monom$\}$. Dann ist $\Sigma = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)\} = \lambda(\Gamma)$, und somit ist die linke Seite eine Vereinigung der Seiten aus Σ'. Nach Lemma 5.21 ist die Menge $\{\tilde{w} \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{in}_{\tilde{w}}(\mathfrak{p}_{\text{proj}})$ enthält ein Monom$\}$ offen in $\mathbb{R}^{n+1}$, also ist ihr Komplement Γ abgeschlossen. Somit enthält Γ mit jedem Polyeder auch alle seine Seiten und ist also ein polyedrischer Unterkomplex des Gröbnerkomplexes. Daher ist $\{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)\}$ Träger des polyedrischen Komplexes

$$\Sigma = \{\lambda(\sigma) : \sigma \in \Gamma\}$$

und somit Γ_v- rational nach Proposition 7.2.

Es sei P ein (inklusions-)maximaler Polyeder in Σ und w ein Punkt in seinem relativen Inneren

$$\text{relint}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ es gibt ein } U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen mit } x \in U \text{ und } U \cap \langle P \rangle \subset P\}.$$

Dann ist $0 \in P - w = \{x - w : x \in P\}$ und wir betrachten die lineare Hülle L der Menge $P - w$ in $\mathbb{R}^n$. Da P Γ_v-rational ist, finden wir eine Matrix $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, so dass die Multiplikationsabbildung $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ den Unterraum L auf die lineare Hülle $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ der ersten k Einheitsvektoren abbildet. Es sei $\psi_M : T^n(K) \to T^n(K)$ die zugehörige monomiale Abbildung, und $\varphi : K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}] \to K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ der Isomorphismus der Laurentpolynomringe, für den

$$\varphi(f)(a_1, \ldots, a_n) = f\big(\psi_M(a_1 \ldots a_n)\big)$$

gilt. Dann gilt für das Primideal $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ in $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$

$$\begin{aligned} \text{in}_w(\mathfrak{p}) &= 1 \text{ genau dann, wenn} \\ \text{in}_{M(w)}(\mathfrak{q}) &= 1 \text{ (Übungsaufgabe).} \end{aligned}$$

Somit ist $M(P)$ eine maximale Seite des oben konstruierten polyedrischen Komplexes für die Menge $Y = V(\mathfrak{q})$.

Es sei $w' = M(w) \in \text{relint}\,\big(M(P)\big)$. Dann ist $\text{in}_{w'+\varepsilon v}(\mathfrak{q}) \neq (1)$ für alle $v \in \mathbb{Z}^n \cap \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ und $\varepsilon \in \Gamma_v$ klein genug. Daraus folgt mit Lemma 5.21 und Proposition 7.2, dass $\text{in}_v \text{in}_{w'}(\mathfrak{q}) = \text{in}_{w'}(\mathfrak{q})$ für alle $v \in \mathbb{Z}^n \cap \langle l_1, \ldots, l_k \rangle$ gilt.

Wir wählen eine Erzeugermenge $\mathcal{G}$ von $\text{in}_{w'}(\mathfrak{q})$, so dass kein Element in $\mathcal{G}$ die Summe von zwei Polynomen in $\text{in}_{w'}(\mathfrak{q})$ mit weniger Monomen im Träger ist. Dies erreichen wir, indem wir eine beliebige Erzeugermenge nehmen und in geeignete Summanden aufteilen. Da für jedes $f \in \mathcal{G}$ die Initialform $\text{in}_v(f)$ höchstens weniger Monome als f hat und in $\text{in}_{w'}(\mathfrak{q})$ liegt, folgt $\text{in}_v(f) = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$. Insbesondere gilt also

$\text{in}_{e_i}(f) = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$ und $i = 1, \ldots, k$, woraus $f = mf'$ mit einem Monom m und einem Laurentpolynom $f' \in k[X_{k+1}^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ folgt.

Da die Monome Einheiten in $k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ sind, wird $\text{in}_{w'}(f)$ also von Elementen in $k[X_{k+1}^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ erzeugt. Daraus folgt, dass $(X_1, \ldots, X_k)$ in Quot $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{q}$ algebraisch unabhängig sind, denn jedes Polynom $h(X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{q}$ würde ein Polynom $\text{in}_{w'}(h)(X_1, \ldots, X_k) \in \text{in}_{w'}(\mathfrak{q})$ produzieren. Somit folgt mit Satz 9.8

$$\begin{aligned} \dim P = k &\leqq \text{trdeg}_K \text{Quot } K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{q} \\ &= \dim V(\mathfrak{q}) \\ &= \dim V(\mathfrak{p}) = \dim X. \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass die maximalen Polyeder in Σ höchstens die Dimension $\dim X$ haben. Es bleibt zu zeigen, dass $\{w : \text{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)\}$ in $\overline{\text{trop(X)}}$ liegt.

Es genügt zu zeigen, dass jedes $w \in \Gamma_v^n$ mit $\text{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)$ in trop(X) liegt. Wir zeigen allgemeiner: Ist $\text{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)$ und $\alpha \in V\big(\text{in}_w(\mathfrak{p})\big) \subset (k^*)^n$, so existiert ein $y \in X$ mit trop$(y) = w$ und $\overline{t^{-w}y} = \alpha$. Außerdem ist die Menge all dieser y dicht in der Zariski-Topologie auf X.

Dazu setzen wir $d = \dim X$. Ist $n = 1$ oder $n - d = 1$, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Kapranov oder ist trivial. Also können wir $n \geqq 2$ und $0 \leqq d \leqq n - 2$ annehmen.

Da $d < n - 1$ ist, können wir nach Satz 9.9 ein $\Gamma \in GL_n(\mathbb{Z})$ finden mit zugehöriger monomialer Abbildung $\psi : T^n(K) \to T^n(K)$, so dass die Komposition $\psi_0 = \pi \circ \psi$ von ψ mit der Projektion $T^n(K) \to T^{n-1}(K)$ auf die ersten $n - 1$ Koordinaten die Eigenschaft hat, dass $\psi_0(X)$ abgeschlossen von der Dimension d ist.

Wie im Beweis von Satz 9.9 können wir ψ so wählen, dass

$$\psi_0(X) = V(\mathfrak{q} \cap K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$$

gilt mit einem Primideal $\mathfrak{q}$, das von Polynomen der Form

$$f_i(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=0}^{d} m_j(X_1 \ldots X_{n-1}) X_n^i (i = 1, \ldots, s)$$

mit Monomen $m_j = m_j(i) \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ erzeugt wird.

Wir betrachten $w \in \Gamma_v^n$ mit $\text{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)$. Dann folgt $\text{in}_{\text{trop}_{\psi_0(w)}}(\mathfrak{q} \cap K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]) \neq (1)$ (Übungsaufgabe). Wir setzen $w' = (\text{trop } \psi)(w)$.

Die monomiale Bijektion ψ vermittelt nach Einschränken eine Bijektion $\psi|_{(R^*)^n} : (R^*)^n \to (R^*)^n$, wobei $R^* = \{x \in K : v(x) = 0\}$ die Einheitengruppe im Bewertungsring ist. Ferner vermittelt $\psi|R^*$ eine monomiale Abbildung $\overline{\psi} : k^{*^n} \to k^{*^n}$. Wir setzen $\alpha' = \overline{\psi}(\alpha)$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Punkt $y' \in V(\mathfrak{q} \cap K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]) \subset T^{n-1}(K)$ mit $v(y_i') = w_i'$ und $\overline{t^{-wi'} y_{i'}} = \alpha_{i'}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Wir betrachten das Ideal

$$\mathfrak{a} = \big(f_1(y_1, \ldots, y_{n-1}, X_n), \ldots, f_s(y_1, \ldots, y_{n-1}, X_n)\big)$$

in $K[X_n]$. Da $K[X_n]$ ein euklidischer Ring ist, existiert ein i mit

$$\mathfrak{a} = \big(f_i(y_1 \ldots y_{n-1}, X_n)\big).$$

Dann gilt für $g(X_n) = f_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, X_n)$ wie im Beweis von Satz 6.4, dass $\mathrm{trop}(g)(w_n') = \mathrm{trop}(f)(w')$ und

$$\mathrm{in}_{w'}(f_i)(\alpha_1', \ldots, \alpha_{n-1}', X_n) = \mathrm{in}_{w_n'}(g)(X_n)$$

gilt. Da $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ eine Nullstelle von $\mathrm{in}_{w'}(f_i)$ ist, folgt $\mathrm{in}_{w_n'}(g)(\alpha_n') = 0$. Nach Satz 6.4 finden wir also ein $y_n' \in K^*$ mit $g(y_n') = 0, v(y_n') = w_n'$ und $\overline{t^{-w_n'} y_n'} = \alpha_n'$. Der Punkt $y' = (y_1', \ldots, y_n') \in T^n(K)$ erfüllt dann $y' \in V(\mathfrak{q})$ und $\mathrm{trop}(y') = w'$ sowie $\overline{t^{-w_{i'}} y_{i'}} = \alpha_{i'}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Setzen wir $y = \psi^{-1}(y')$, so liegt $y \in V(\mathfrak{p})$ und erfüllt

$$\begin{aligned} \mathrm{trop}(y) &= \mathrm{trop}(\psi^{-1})w' \\ &= w \end{aligned}$$

sowie

$$\overline{\psi}\big((t^{-w_1} y_1, \ldots, t^{-w_n} y_n)\big) = (t^{-w_1'} y_1', \ldots, t^{-w_n'} y_n') = \alpha',$$

also

$$\overline{t^{-w_i} y_i} = \overline{\alpha_i} \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

wie verlangt.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Menge Y dieser y zu gegebenem w und α Zariski-dicht in X liegt.

Falls das nicht der Fall ist, so existiert eine abgeschlossene Teilmenge $X' = V(\tilde{\mathfrak{p}})$ für ein Primideal $\tilde{\mathfrak{p}} \supsetneqq \mathfrak{p}$ in X, die Y enthält. Dann ist $\psi_0(Y) \subset \psi_0(X') \subset \psi_0(X)$, wobei nach Konstruktion von ψ_0 die Gleichung $d = \dim X = \dim \psi_0(x)$ gilt.

Per Induktion können wir annehmen, dass $\psi_0(Y)$ Zariski-dicht in $\psi_0(X)$ liegt, woraus folgt, dass auch $\psi_0(X')$ dicht liegt. Das widerspricht wegen $\dim \psi_0(X') \leqq \dim X'$ der Annahme $\dim X' < \dim X$. $\square$

Jetzt wollen wir noch überlegen, wie wir Satz 9.10 auf beliebige Ideale verallgemeinern können. Dazu brauchen wir die sogenannte Primärzerlegung von Idealen.

Ein Ideal $\mathfrak{q}$ in $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ oder in $K[X_1, \ldots, X_n]$ für einen beliebigen Körper K heißt **primär**, falls aus $fg \in \mathfrak{q}$ folgt, dass $f \in \mathfrak{q}$ oder $g^m \in \mathfrak{q}$ ist für ein $m > 0$.

Beispiel: Jedes Primideal ist primär. Das Ideal $(X_1, X_2^2) \subset K[X_1, X_2]$ ist primär, aber kein Primideal.

Wir erinnern an die Definition

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in K[X_1, \ldots, X_n] : \text{es gibt ein } m > 0 \text{ mit } f^m \in \mathfrak{a}\}$$

des Radikalideals aus Kapitel 5.

Das Radikalideal eines primären Ideals ist immer ein Primideal.

Satz 9.11 *(Primärzerlegung) Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ oder in $K[X_1, \ldots, X_n]$ lässt sich schreiben als endlicher Schnitt $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{q}_i$ von Primäridealen $\mathfrak{q}_i$. Diese Primärzerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig, aber wenn wir annehmen, dass $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \not\subset \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ für $i \neq j$ gilt, so ist zumindest die Menge*

$$\mathit{Ass}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}_i : \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}\}$$

*der sogenannten minimalen **assoziierten Primideale** eindeutig bestimmt.*

Die Primärzerlegung von Idealen verallgemeinert die Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren in $K[X]$. Ist $f \in K[X^{\pm 1}]$, so ist $f = X^d g(X)$ für ein $g \in K[X]$ und ein $d \in \mathbb{Z}$. Da $K[X]$ faktoriell ist, können wir g zerlegen als

$$g(X) = \prod_{i=1}^{s} g_i(X)^{d_i}$$

mit irreduziblen Faktoren $g_i \in K[X]$.

Ist K algebraisch abgeschlossen, so gilt sogar $g(X) = c \prod_{i=1}^{d} (X - a_i)$ für geeignete a_i, c in K.

Da jedes irreduzible Polynom g_i ein Primideal (g_i) erzeugt, ist

$$(f) = (g) = \bigcap_{i=1}^{s} (g_i^{d_i})$$

eine Primärzerlegung und die assoziierten Primideale zu (g) sind gerade die Ideale (g_i).

Ist $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{i=1}^{s} \mathfrak{q}_i$ eine Primärzerlegung von $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$, so ist offenbar

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{s} V(\mathfrak{q}_i).$$

Da $V(\sqrt{\mathfrak{q}_i}) = V(\mathfrak{q}_i)$ gilt (denn a ist Nullstelle von f^m genau dann, wenn a Nullstelle von f ist), und $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ ein Primideal ist, so ist

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{s} V(\sqrt{\mathfrak{q}_i})$$

eine endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von $T^n(K)$. Damit können wir Satz 9.10 verallgemeinern auf beliebige Nullstellenmengen.

Korollar 9.12 *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit einer Bewertung v und $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal. Dann stimmen folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ überein:*

i) $\overline{\textit{trop}\, V(\mathfrak{a})}$

ii) $\{w \in \mathbb{R}^n : \textit{in}_w(\mathfrak{a}) \neq (1)\}$

iii) $X_{\textit{trop}} = \bigcap\limits_{f \in \mathfrak{a}} V\big(\textit{trop}(f)\big).$

Diese Menge ist Träger eines polyedrischen Komplexes Σ. Dieser ist das Bild der Einschränkung des Gröbnerkomplexes zu $\mathfrak{a}_{\textit{proj}}$ auf die Teilmenge

$$\{\tilde{w} \in \mathbb{R}^{n+1} : \textit{in}_{\tilde{w}}(\mathfrak{a}) \neq (1)\}$$

von $\mathbb{R}^{n+1}$ unter der Abbildung

$$\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n.$$

Beweis : Die Übereinstimmung der Mengen in ii) und iii) haben wir schon in Proposition 9.3 gezeigt. Dass die Menge i) in der Menge iii) enthalten ist, zeigt man mit Hilfe von Satz 6.4 genau wie in dem Fall, dass $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist. Es genügt also zu zeigen, dass die Menge ii) in der Menge i) enthalten ist.

Wir betrachten eine Primärzerlegung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$$

von $\mathfrak{a}$. Falls für $w \in \mathbb{R}^n$ alle $\text{in}_w(\mathfrak{q}_i) = 1$ sind, finden wir nach Lemma 8.3 ein $f_i \in \mathfrak{q}_i$, so dass $\text{in}_w(f_i)$ ein Monom ist. Das Produkt $f = f_i \dots f_s$ liegt in allen $\mathfrak{q}_i$, also in $\mathfrak{a}$. Da $\text{in}_w(f)$ ebenfalls ein Monom ist nach Lemma 8.3, folgt $\text{in}_w(\mathfrak{a}) = (1)$.

Wählen wir nun ein $w \in \mathbb{R}^n$ in der Menge ii), so gibt es also ein $i \in \{1, \dots, s\}$ mit $\text{in}_w(\mathfrak{q}_i) \neq (1)$. Daraus folgt auch $\text{in}_w(\sqrt{\mathfrak{q}_i}) \neq (1)$, denn ein Monom in $\text{in}_w(\sqrt{\mathfrak{q}_i})$ wäre nach Lemma 8.3 von der Form $\text{in}_w(g)$ für ein $g \in \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Gilt dann $g^m \in \mathfrak{q}_i$, so ist $\text{in}_w(g^m) = \text{in}_w(g)^m$ ein Monom in $\text{in}_w(\mathfrak{q}_i)$.

Da $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ ein Primideal ist, können wir Satz 9.10 auf $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ anwenden und erhalten $w \in \overline{\text{trop}\, V(\sqrt{\mathfrak{q}_i})}$. Nun ist $V(\sqrt{\mathfrak{q}_i}) = V(\mathfrak{q}_i) \subset V(\mathfrak{a})$, da $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_i$ gilt. Somit folgt in der Tat $w \in \overline{\text{trop}\, V(\mathfrak{a})}$.

Wie im Beweis von Satz 9.10 zeigt man, dass λ die Teilmenge

$$\{\tilde{w} \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{in}_{\tilde{w}}(\mathfrak{a}_{\text{proj}} \text{ enthält kein Monom}\}$$

surjektiv auf $\{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(\mathfrak{a}) \neq (1)\}$ abbildet. Diese Teilmenge ist ein Unterkomplex des Gröbnerkomplexes. Wir definieren Σ als das Bild dieses Unterkomplexes unter λ. $\square$

Wir wollen jetzt das Bild einer tropischen Varietät unter einer monomialen Abbildung untersuchen.

Es sei $\psi : T^r(K) \to T^s(K)$ die monomiale Abbildung zur Matrix $M \in \mathbb{Z}^{s \times r}$, die wir auch als trop ψ bezeichnen. Es gilt also

$$\psi(a_1, \dots, a_r) = \left(\prod_{j=1}^{r} a_j^{m_{ij}}, \dots, \prod_{j=1}^{r} a_j^{m_{sj}} \right),$$

und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T^r(K) & \xrightarrow{\psi} & T^s(K) \\ \text{trop} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^r & \xrightarrow{M = \text{ trop } \psi} & \mathbb{R}^s \end{array}$$

ist kommutativ.

Korollar 9.13 *In der obigen Situation sei $\mathfrak{p} \subset K[Y_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}]$ ein Primideal und $X = V(\mathfrak{p})$. Wir betrachten den Zariski-Abschluss $\overline{\psi(X)}$ von $\psi(X)$ in $T^s(K)$. Dann gilt*

$$\overline{\psi(X)}_{trop} = M(X_{trop}).$$

Beweis : Die Inklusion $M(X_{\text{trop}}) \subset \overline{\psi(X)}_{\text{trop}}$ folgt aus Satz 9.10 und dem obigen kommutativen Diagramm, das

$$M \text{ trop}(X) = \text{trop } \psi(X)$$

impliziert, woraus auch

$$\begin{aligned} M\big(\overline{\text{trop}(X)}\big) &\subset \overline{M\big(\text{trop}(X)\big)} \\ &\subset \overline{\text{trop } \overline{\psi(X)}} \text{ folgt.} \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $w \in \overline{\psi(X)}_{\text{trop}} \cap \Gamma_v^s$, so liegt nach Satz 9.10 die Menge

$$\{y \in \overline{\psi(x)} : \text{ trop}(y) = w\}$$

Zariski-direkt in $\overline{\psi(X)}$. Daher enthält sie ein $y \in \psi(X)$. Ist $y = \psi(x)$ für $x \in X$, so folgt aus $M\big(\text{trop}(x)\big) = \text{trop } \psi(x) = \text{trop } y = w$, dass $w \in M\big(\text{trop}(X)\big) \subset M(X_{\text{trop}})$ liegt.

Da $M(X_{\text{trop}})$ als Bild eines polyedrischen Komplexes einer linearen Abbildung abgeschlossen in $\mathbb{R}^s$ ist, folgt mit Satz 9.10 auch $\overline{\psi(X)}_{\text{trop}} \subset M(X_{\text{trop}})$. □

Wir wollen jetzt noch auf das Verhalten von Tropikalisierungen unter Körpererweiterungen eingehen.

Es sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung von zwei algebraisch abgeschlossenen Körpern, die kompatible Bewertungen tragen, das heißt, die Einschränkung der Bewertung $v : L^* \to \mathbb{R}$ auf K^* liefert die Bewertung auf K.

Es sei $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal. Mit $\mathfrak{a}_L \subset L[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ bezeichnen wir das von einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$ erzeugte Ideal im größeren Ring $L[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$.

Wir haben die Tropikalisierungsabbildungen

$$\text{trop}_K : T^n(K) \to \mathbb{R}^n$$

und

$$\text{trop}_L : T^n(L) \to \mathbb{R}^n.$$

Satz 9.14 *In der obigen Situation gilt*

$$\overline{\mathit{trop}_K\big(V(\mathfrak{a})\big)} = \overline{\mathit{trop}_L V(\mathfrak{a}_L)}$$

Beweis : Da offensichtlich $\text{trop}_K\big(V(\mathfrak{a})\big) \subset \text{trop}_L V(\mathfrak{a}_L)$ ist, ist die Inklusion „ $\subset$ “ klar. Um die andere Inklusion zu zeigen, verwenden wir Satz 9.10.

Aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_L$ folgt

$$\bigcap_{f \in \mathfrak{a}_L} V\big(\text{trop}(f)\big) \subset \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V\big(\text{trop}(f)\big),$$

also mit Satz 9.10 auch

$$\overline{\text{trop } V(\mathfrak{a}_L)} \subset \overline{\text{trop}\big(V(\mathfrak{a})\big)}.$$

□

Diesen Satz kann man verwenden, um Tropikalisierungen über beliebigen bewerteten Körpern zu definieren. Ist Ω ein beliebiger Körper mit einer Bewertung v, so wählen wir einen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper K, auf den wir v fortsetzen können und definieren für $\mathfrak{a} \subset \Omega[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$:

$$V(\mathfrak{a})_{\text{trop}} = V(\mathfrak{a}_K)_{\text{trop}} = \overline{\text{trop } V(\mathfrak{a}_K)}.$$

Nach Satz 9.14 ist das unabhängig von der Wahl von K.

Wir schauen uns jetzt noch die lokale Struktur einer tropischen Varietät an.

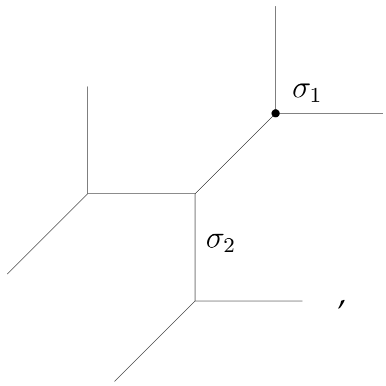
Definition 9.15 *Es sei Σ ein polyedrischer Komplex in $\mathbb{R}^n$ und σ ein Polyeder in Σ. Dann definieren wir für jeden Polyeder τ in Σ, der σ als Seite enthält, einen Kegel $\overline{\tau}$ durch*

$$\overline{\tau} = \{\lambda(x-y) : \lambda \geqq 0, x \in \tau, y \in \sigma\}.$$

Der Stern $\text{star}_\Sigma(\sigma)$ von σ in Σ ist dann der Fächer, der aus allen $\overline{\tau}$ besteht, wobei $\tau \in \Sigma$ ein Polyeder ist, der σ als Seite hat.

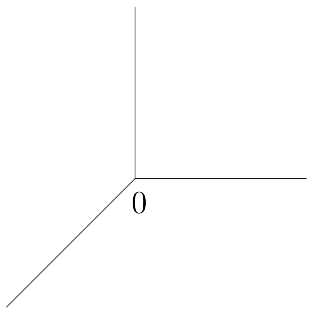
Übungsaufgabe: Wieso ist $\text{star}_\Sigma(\sigma)$ ein Fächer?

Beispiel: Ist Σ die tropische Kurve

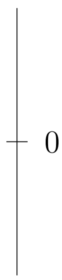


,

so ist der Fächer der Ecke σ_1 gerade der folgende:



Der Fächer der Seite σ_2 ist



denn σ_2 ist der einzige Polyeder mit Seite σ_2.

Ist allgemein σ eine maximale Seite in einem polyedrischen Komplex Σ, so ist $\mathrm{star}_\Sigma(\sigma)$ der Linearraum des affinen Spans von σ (siehe Kapitel 2). Es gilt also

$$\mathrm{star}_\Sigma(\sigma) = \langle \sigma - a \rangle$$

für beliebiges $a \in \sigma$, wobei $\langle \sigma - a \rangle$ die lineare Hülle der Menge $\sigma - a = \{b - a : b \in \sigma\}$ bezeichnet.

Lemma 9.16 *Ist Σ ein polyedrischer Komplex und σ ein Polyeder in σ mit $w \in$ relint(σ), so gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n$:*

Der Punkt $w + \varepsilon v$ liegt in Σ für alle $\varepsilon > 0$ klein genug genau dann, wenn $v \in$ star$_\Sigma(\sigma)$.

Beweis : Ist $y = w + \varepsilon v \in \Sigma$ für $\varepsilon > 0$, so folgt $v = \frac{1}{\varepsilon}(y - w) \in$ star$_\Sigma(\sigma)$ für ε klein genug.

Sei umgekehrt $v \in$ star$_\Sigma(\sigma)$, also $v \in \overline{\tau}$ für eine Seite τ, die σ enthält. Dann ist v von der Form $v = \lambda(x - y)$ für $x \in \tau$ und $y \in \sigma$.

Also gilt

$$\begin{aligned} w + \varepsilon v &= w + \varepsilon\lambda(x - y) \\ &= \varepsilon\lambda x + (1 - \varepsilon\lambda)\left(\tfrac{w}{1-\varepsilon\lambda} - \tfrac{\varepsilon\lambda}{1-\varepsilon\lambda} y\right). \end{aligned}$$

Da w in relint(σ) liegt, liegt $\frac{w}{1-\varepsilon\lambda} - \frac{\varepsilon\lambda}{1-\varepsilon\lambda} y$ für kleine $\varepsilon > 0$ in σ, also liegt $w + \varepsilon v$ in τ aufgrund der Konvexität von τ. $\square$

Proposition 9.17 *Es sei wie oben $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal und $X = V(\mathfrak{a}) \subset T^n(K)$. Ferner sei Σ der polyedrische Komplex aus Satz 9.10 mit Träger*

$$X_{trop} = \{w \in \mathbb{R}^n : in_w(\mathfrak{a}) \neq (1)\}.$$

Ist σ ein Polyeder in Σ mit $w \in$ relint(σ), so gilt

$$V\left(in_w(\mathfrak{a})\right)_{trop} = star_{X_{trop}}(\sigma).$$

Also lässt sich der Fächer $star_{X_{trop}}(\sigma)$ mit einem polyedrischen Komplex auf $V\left(in_w(\mathfrak{a})\right)_{trop} = \{v \in \mathbb{R}^n : in_v\, in_w(\mathfrak{a}) \neq (1)\}$ identifizieren. Hier statten wir wie immer den Restklassenkörper k mit der trivialen Bewertung aus.

Beweis : Nach Korollar 9.12 ist $\Sigma = \lambda(\Sigma')$ für den Unterkomplex

$$\Sigma' = \{\tilde{w} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathrm{in}_{\tilde{w}}(\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}}) \text{ enthält kein Monom}\}$$

des Gröbnerkomplexes zu $\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}}$. Sei σ' die Seite in Σ' mit $\sigma = \lambda(\tau')$ und $w' = (0, w) \in$ relint(σ'). Nach Proposition 8.2 gilt für $w \in \mathbb{R}^n$: $\mathrm{in}_w(\mathfrak{p}) \neq (1)$ genau dann, wenn $\mathrm{in}_{w'}\mathfrak{p}_{\mathrm{proj}}$ kein Monom enthält.

Dann gilt für $v' \in \mathbb{R}^{n+1}$: Nach Lemma 9.16 ist $v' \in$ star$_{\Sigma'}(\sigma')$ genau dann, wenn $w' + \varepsilon v' \in \Sigma'$ für $\varepsilon > 0$ klein genug, also genau dann, wenn $\mathrm{in}_{w'+\varepsilon v'}\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}}$ kein Monom enthält.

Nach Lemma 5.21 ist das äquivalent dazu, dass $\mathrm{in}_{v'}\mathrm{in}_{w'}\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}}$ kein Monom enthält. Also gilt

$$\mathrm{star}_{\Sigma'}(\sigma') = \{v' \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathrm{in}_{v'}\mathrm{in}_{w'}\mathfrak{a}_{\mathrm{proj}} \text{ enthält kein Monom}\}.$$

Durch Anwenden von $\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ folgt die Behauptung. □

Da für trop: $T^n(K) \to \Gamma_v^n$ das Urbild $\mathrm{trop}^{-1}(w)$ eine unendliche Menge ist, ist folgendes Resultat interessant.

Proposition 9.18 *Es sei $\mathfrak{p} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Primideal und $X = V(\mathfrak{p}) \subset T^n(K)$. Falls X_{trop} eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, so ist auch X eine endliche Menge.*

Beweis : Wir führen Induktion nach n. Ist $n = 1$, so ist $\mathfrak{p} \subset K[X_1^{\pm 1}]$ ein Hauptideal. Da jedes Polynom $\neq 0$ nur endlich viele Nullstellen in K hat, ist dann X immer endlich.

Wir nehmen also $n > 1$ an. Falls $\dim X = n - 1$, so ist nach dem Satz 6.4 von Kapranov X_{trop} nicht endlich. Also können wir $\dim X < n - 1$ annehmen und Satz 9.9 anwenden. Daher existiert ein $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ mit zugehöriger monomialer Bijektion

$$\psi : T^n(K) \to T^n(K),$$

so dass für $\psi_0 = \pi \circ \psi : T^n(K) \to T^{n-1}(K)$ gilt: $\dim X = \dim \psi_0(X)$. Wir setzen $Y = \psi(X)$. Dann ist wie im Beweis von Satz 9.9 $Y = V(\mathfrak{q})$ für ein Primideal $\mathfrak{q} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$, das von Polynomen erzeugt wird, deren X_n-Koeffizienten Monome sind.

Da $\psi|_X : X \to Y$ eine Bijektion ist und $M : X_{\mathrm{trop}} \to Y_{\mathrm{trop}}$ ebenfalls, genügt es, die Behauptung für Y zu zeigen.

Da Y_{trop} endlich ist, ist nach Korollar 9.13 auch $\pi(Y)_{\mathrm{trop}}$ endlich. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $\pi(Y) \subset T^{n-1}(K)$ ergibt sich also, dass $\pi(Y)$ eine endliche Menge ist.

Aufgrund der speziellen Gestalt von $\mathfrak{q}$ liegen aber über jeder Nullstelle von $\mathfrak{q} \cap K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]$ nur endlich viele Nullstellen von $\mathfrak{q}$. Also ist auch Y eine endliche Menge. □

Jetzt können wir den Struktursatz vollständig beweisen:

Satz 9.19 *Es sei $\mathfrak{p} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Primideal und $X = V(\mathfrak{p})$. Falls $\dim X = d$ ist, so ist $\overline{\text{trop}(X)}$ der Träger eines Γ_v-rationalen polyedrischen Komplexes rein von der Dimension d.*

Beweis : Nach Satz 9.10 wissen wir schon, dass $\overline{\text{trop}(X)}$ der Träger eines Γ_v-rationalen polyedrischen Komplexes Σ ist, dessen maximale Seiten von der Dimension $\leqq d$ sind. Wir müssen nur noch zeigen, dass für jede maximale Seite σ von Σ auch $\dim \sigma \geqq d$ gilt.

Sei σ ein maximaler Polyeder in Σ und $w \in$ relint(σ). Nach Proposition 9.17 gilt

$$\overline{\text{trop } V\big(\text{in}_w(\mathfrak{p})\big)} = \text{star}_{X_{\text{trop}}}(\sigma).$$

Da σ maximal ist, ist $\text{star}_{X_{\text{trop}}}(\sigma) = L$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k = \dim \sigma$. Wie im Beweis von Satz 9.10 sei $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $M\,L = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. Indem wir X durch sein Bild unter der zugehörigen monomialen Bijektion $\psi : T^n(K) \to T^n(K)$ ersetzen, können wir annehmen, dass $L = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ gilt.

Nach Lemma 5.21 ist für alle $v \in L$ $\text{in}_v \text{in}_w(\mathfrak{p}) = \text{in}_{w+\varepsilon v}(\mathfrak{p})$ für $\varepsilon > 0$ klein genug. Da $w \in$ relint(σ) liegt, gilt außerdem $\text{in}_{w+\varepsilon v}(\mathfrak{p}) = \text{in}_w(\mathfrak{p})$ für ε klein genug.

Daher ist nach Lemma 8.3 ii) $\text{in}_w(\mathfrak{p})$ ein homogenes Ideal, wenn wir die Graduierung durch $\deg(X_i) = v_i$ definieren.

Setzen wir hier $v = e_1, \ldots, e_k$ ein, so erhalten wir, dass $\text{in}_w(\mathfrak{p})$ homogen ist mit jeder Graduierung der Form

$$\deg(X_i) = \delta_{ij} \text{ für } j = 1, \ldots, k.$$

Daraus folgt, dass $\text{in}_w(\mathfrak{p})$ von Laurentpolynomen erzeugt wird, in denen nur die Variablen $X_{k+1}, \ldots, X_n$ vorkommen.

Es sei $v = (0, v') \in \mathbb{R}^n$ mit $v' \in \mathbb{R}^{n-k+1} \backslash \{0\}$ ein Punkt in trop $V\big(\text{in}_w(\mathfrak{p})\big)$. Da $v \notin L = \text{star}_{X_{\text{trop}}}(\sigma)$ ist, folgt nach Proposition 9.17 $\text{in}_v \text{in}_w(\mathfrak{p}) = (1)$. Daher existiert ein $f \in \text{in}_w(\mathfrak{p})$, so dass $\text{in}_v(f)$ ein Monom ist. Da $\text{in}_w(\mathfrak{p})$ homogen bezüglich der oben definierten Graduierung ist, können wir f eventuell nach Multiplikation mit einem Monom so wählen, dass f in $K[X_{k+1}^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ liegt. Dann ist also $\text{in}_{v'} f$ ein Monom.

Daher ist trop $V\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{p}) \cap K[X_{k+1}^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]\big) \subset \{0\}$ für $0 \in \mathbb{R}^{n-k+1}$. Nach Proposition 9.18 ist also $V\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{p}) \cap K[X_{k+1}^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]\big)$ eine endliche Menge. Sie hat daher die Dimension 0. Daraus folgt, dass die Dimension von $V\big(\mathrm{in}_w(\mathfrak{p})\big)$ höchstens k ist.

Jetzt betrachtet man für den Bewertungsring R von K das Ideal

$$\mathfrak{p}_R = \big(t^{-\mathrm{trop}(f)(w)} f(t^{w_1}X_1, \ldots, t^{w_n}X_n) : f \in \mathfrak{p}\big)$$

und zeigt, dass

$$R[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{p}_R \text{ ein flacher } R-\text{Modul}$$

mit generischer Faser

$$\big(R[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{p}_R\big) \otimes_R K = K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{p}$$

und spezieller Faser

$$\big(R[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{p}_R\big) \otimes_R k = k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathrm{in}_w(\mathfrak{p})$$

ist.

Daher sind die Dimensionen dieser beiden Ringe gleich, und es folgt $d = \dim X \leqq k$ wie gewünscht. □

Zum Abschluss wollen wir nun noch die Eigenschaft der Balanciertheit für tropische Varietäten diskutieren.

Definition 9.20 *i) Es sei Σ ein Γ_v-rationaler eindimensionaler gewichteter Fächer im $\mathbb{R}^n$, das heißt, für jeden Strahl r_i von Σ sei ein Gewicht $m_i \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Für den Strahl r_i sei ferner v_i der erste Vektor in $\mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$ auf r_i. Wir nennen Σ balanciert, falls*

$$\sum_i m_i v_i = 0$$

gilt.

ii) Ist Σ ein Γ_v-rationaler Fächer rein von Dimension d im $\mathbb{R}^n$ zusammen mit Gewichten $m(\sigma) \in \mathbb{R}$ für alle $d-$dimensionalen (also maximalen) Seiten σ in Σ, so heißt Σ balanciert in einer $(d-1)-$dimensionalen Seite τ, falls für den $(d-1)-$dimensionalen Unterraum $L = \langle \tau \rangle$ in $\mathbb{R}^n$ folgende Bedingung erfüllt ist:

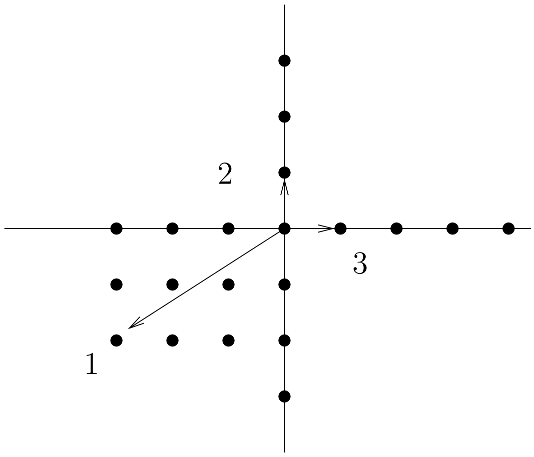
Bezeichnen wir für jede $d-$dimensionale Seite σ mit $\sigma \succ \tau$ mit u_σ den ersten Punkt in $\mathbb{Z}^n/L \cap \mathbb{Z}^n$ auf dem Strahl $\mathbb{R}_{\geqq 0}\sigma + L$ in $\mathbb{R}^n/L$, so gilt

$$\sum_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \dim \sigma = d}} m(\sigma) n_\sigma = 0.$$

Falls Σ in allen $(d-1)-$dimensionalen Seiten balanciert ist, so nennen wir Σ balanciert.

iii) *Nun sei Σ ein Γ_v-rationaler polyedrischer Komplex rein von Dimension d im $\mathbb{R}^n$. Gegeben sei für jede $d-$dimensionale (also maximale) Seite σ in Σ ein Gewicht $m(\sigma) \in \mathbb{R}$. Dann heißt Σ balanciert in einer $(d-1)-$dimensionalen Seite τ, falls der Fächer $\text{star}_\Sigma(\tau)$ mit den induzierten Gewichten $m(\sigma)$ balanciert in $\overline{\tau}$ ist. Σ heißt balanciert, falls Σ in allen $(d-1)-$dimensionalen Seiten balanciert ist.*

Beispiel für einen balancierten eindimensionalen Fächer:



Wir betrachten zuerst ebene tropische Kurven, siehe Kapitel 3. Es sei

$$p(x,y) = \min_{(i,j)\in I}\{a_{ij} + ix + iy\}$$

ein tropisches Laurentpolynom in zwei Variablen mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und einer endlichen Menge $I \subset \mathbb{Z}^2$.

Im Satz 3.3 haben wir gesehen, dass die tropische Nullstellenmenge $V(p)$ ein Graph ist, der dual zur Newtonzerlegung des Newtonpolytops Newt(p) ist.

Wir betrachten für jede Kante σ von $V(p)$ die duale Kante $e(\sigma)$ in der Newtonzerlegung und definieren

$$m(\sigma) = \left(\mathbb{Z}^2 \cap e(\sigma)\right) - 1.$$

Dies ist die Gitterlänge von $e(\sigma)$.

Proposition 9.21 *Die tropische ebene Kurve $V(p)$ zusammen mit den Gewichten $m(\sigma)$ ist balanciert.*

Beweis : Wir betrachten das Newtonpolytop Newt(p) $=$ convex$\{(i,j) : (i,j) \in I\}$ im $\mathbb{R}^2$. Seine Ecken liegen in $\mathbb{Z}^2$.

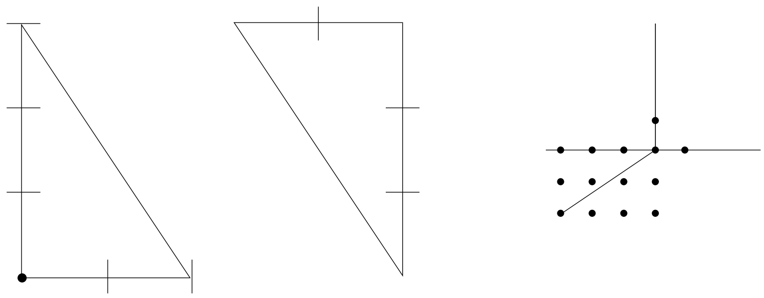
Jede Ecke τ von $V(p)$ gehört zu einem Polytop Q in der Newtonzerlegung von Newt(p).

Die Kanten σ von $V(p)$, die an τ angrenzen, entsprechen den Kanten $e(\sigma)$ von Q. Für jede solche Kante σ sei u_σ der zugehörige primitive Gittervektor, also der erste Punkt in $\mathbb{Z}^2$ auf dem Strahl $\mathbb{R}_{\geqq 0}(\sigma - \tau)$.

Dann ist der Vektor $m_\sigma u_\sigma$ gerade die um $90°$ gedrehte Kante $e(\sigma)$. Die Summe $\sum\limits_{\sigma \succ T} m_\sigma n_\sigma$ entspricht also dem Vektor, den man erhält, wenn man Q nach 0 verschiebt und dann einmal den Rand von Q abläuft. Daher ist $\sum\limits_{\sigma \succ \tau} m_\sigma n_\sigma = 0$, also ist $V(p)$ balanciert um τ. $\square$

Beispiel: Es sei $p(x,y) = x^{②} \oplus y^{③} \oplus 0 = \min\{2x, 3y, 0\}$

Dann besteht die Newtonzerlegung einfach aus dem Polygon Newt(p) selbst.



Newt(p) $\qquad\qquad$ $V(p)$

Ein analoges Resultat gilt auch in höherdimensionalen Umgebungsräumen.

Es sei $f \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ ein Laurentpolynom über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, der eine Bewertung trägt. Dann ist nach Satz 6.4 und 6.8 $\overline{\text{trop } V(f)} = V(\text{trop}(f))$ das $(n-1)-$Skelett des polyedrischen Komplexes, der dual zur Newtonzerlegung von Newt$(\text{trop}(f))$ ist. Jede $(n-1)-$dimensionale Seite σ in diesem Komplex ist also dual zu einer eindimensionalen Seite, das heißt, einer Kante, $e(\sigma)$ in der Newtonzerlegung. Wir definieren genau wie zuvor $m(\sigma)$ als die Gitterlänge dieser Kante.

Satz 9.22 *Die tropische Hyperfläche $V(\text{trop}(f))$ zusammen mit den Gewichten $m(\sigma)$ für die maximalen Seiten σ ist ein balancierter polyedrischer Komplex.*

Beweis : Ist τ eine $(n-2)-$dimensionale Seite, so sei $L = \langle \tau - a \rangle$ für beliebiges $(a \in \tau)$ der Linearraum zu τ. Dann ist $L = \overline{\tau}$ der Linearraum des Fächers $\text{star}_{V(\text{trop}(f))}\tau = L \cup \bigcup_{\substack{\sigma \succ \tau \\ \dim \sigma = n-1}} \overline{\sigma}$.

Wir müssen zeigen, dass dieser Fächer balanciert in $L = \overline{\tau}$ ist. Dazu betrachten wir das Quotientengitter $\mathbb{Z}^n / L \cap \mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{R}^n / L$.

Hier ist wieder $m(\sigma)u_\sigma$ die um $90°$ gedrehte Seite $e(\sigma)$ des Newtonpolygons. Jetzt folgt die Behauptung wie in Proposition 9.21. □

Wenn wir diese Balanciertheitseigenschaft auf beliebige tropische Varietäten übertragen wollen, dann brauchen wir eine alternative Beschreibung der Gewichte.

Es sei $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Ideal und $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$ eine Primärzerlegung sowie $\text{Ass}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s)$ die Menge der minimalen assoziierten Primideale, also die Menge aller $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$, nachdem wir redundante Primideale weglassen.

Definition 9.23 *Die Vielfachheit von $\mathfrak{p}_i$ in $\mathfrak{a}$ ist definiert als*

$$\textit{mult}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{a}) = \textit{Länge des Artin-Rings}(K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}_i}.$$

Hier ist $(K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}_i}$ die Lokalisierung von $K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]/\mathfrak{a}$ nach dem minimalen Primideal $\mathfrak{p}_i$.

Ist $\mathfrak{a} = (f)$ ein Ideal im Hauptidealring $K[X_1^{\pm 1}]$ mit $f = c\Pi_i(X - \alpha_i)^{m_i}$, so sind die assoziierten Primideale zu $\mathfrak{a}$ gerade die $(X - \alpha_i)$ und

$$\text{mult}\big((X - \alpha_i), \mathfrak{a}\big) = m_i.$$

Mit diesem neuen Begriff gilt

Korollar 9.24 *Ist $f \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ und σ eine $(n-1)-$dimensionale Seite in $V\big(\textit{trop}(f)\big)$, so gilt für jedes $w \in$relint(σ) :*

$$m(\sigma) = \sum_{\mathfrak{p} \in Ass\big((in_w(f)\big)} \textit{mult}\big(\mathfrak{p}, in_w(f)\big).$$

Beweis : Es sei $f = \Sigma c_I X^I$. Das Initialideal $\text{in}_w(\mathfrak{p})$ ist das von $\text{in}_w(f) = \sum_{I \in e(\sigma)} \overline{t^{-v(c_I)} c_I} x^I$ erzeugte Hauptideal.

Da $e(\sigma)$ eindimensional ist, ist der Vektor $I - I'$ für $I, I' \in e(\sigma)$ bis auf einen Linearfaktor eindeutig bestimmt. Wir wählen $J = I - I'$ minimal unter allen diesen Möglichkeiten. Dann ist $\mathrm{in}_w(f)$ das Produkt eines Monoms mit einem Laurentpolynom der Form

$$g(X^J) \text{ für } g \in K[Y^{\pm 1}].$$

Also ist der Grad von g in Y gerade die Gitterlänge von $e(\sigma)$. Da g ein Laurentpolynom in einer Variablen ist, folgt aber auch

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\left(\mathrm{in}_w(f)\right)} \mathrm{mult}\big(\mathfrak{p}, \mathrm{in}_w(f)\big) = \mathrm{grad}(g)$$

und somit die Behauptung. □

Satz 9.25 *Ist $\mathfrak{a} \subset K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ein Primideal, so ist der polyedrische Komplex Σ auf $V(\mathfrak{a})_{trop}$ balanciert mit den Gewichten*

$$m(\sigma) = \sum_{\mathfrak{p} \in \, Ass\left(in_w(\mathfrak{a})\right)} mult(\mathfrak{p}, \mathfrak{a})$$

für $w \in$ relint(σ).

Diesen Satz werden wir hier nicht beweisen, er verlangt tiefere Kenntnisse in kommutativer Algebra.

Literatur

[AG] A. Werner. *Algebraische Geometrie – Grundlagen.* Skript.

[Gu] W. Gubler. *A guide to tropicalizations.* In: Algebraic and Combinatorial Aspects of Tropical Geometry, Contemporary Mathematics, Vol. 589, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 125–189.

[MSt] D. Maclagan, B. Sturmfels. *Introduction to tropical Geometry.* American Math. Soc., 2015.

[NZ] A. Werner. *Nicht-archimedische Zahlen.* Skript.

[Zie] G. Ziegler. *Lectures on Polytopes.* Springer 1995.