SEMINAR

Brauergruppe

Sommersemester 2021

Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Dr. Martin Lüdtke und Theresa Kumpitsch

Motivation dieses Seminars

In der klassischen Algebra werden Körper studiert. Verzichtet man auf die Kommutativität der Multiplikation, so handelt es sich um Schiefkörper. Beispielsweise gibt es über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen genau einen endlich-dimensionalen nichtkommutativen Schiefkörper, nämlich den Hamilton'schen Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$. Dieses Beispiel stellt den Anfang unseres Seminars dar.

Wie sieht es aus, wenn wir den Körper $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper K ersetzen? Um diese Frage zu beantworten, wird die Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ eingeführt. Im ersten Teil des Seminars werden wir diese auf klassische Weise definieren, nämlich als Äquivalenzklassen von endlich-dimensionalen zentral einfachen Algebren über K. Wir werden sehen, dass die zentralen Schiefkörper über K genau diesen Äquivalenzklassen entsprechen, und dass es ein Analogon zum Struktursatz für Vektorräume über Körpern gibt, nämlich dass sich die Struktur von Moduln über solchen Algebren relativ einfach beschreiben lässt. Gegen Ende des Seminars werfen wir nochmal einen modernen Blick auf die Brauergruppe und zeigen, dass man diese durch Gruppenkohomologie interpretieren kann (und welche Vorteile dieser Blick für die Theorie hat).

Organisatorisches

Termin: Montag, 14–16 Uhr (Link zur Videokonferenz wird über die Mitteilungen im OLAT-Kurs publiziert), ab dem 19.04.2020 (zweite Vorlesungswoche).

Zielgruppe: Die Veranstaltung richtet sich an Bachelorstudierende ab dem 4. Semester sowie Masterstudierende. Kenntnisse aus der Vorlesung „Algebra“ werden vorausgesetzt.

Studienleistung: Für diese Studienleistung müssen Studierende:

(a) Regelmäßig (und aktiv) am Seminar teilnehmen;

(b) Einen max. 1,5-stündigen Vortrag halten. Ca. zwei Wochen vor dem Vortrag soll ein (virtueller) Sprechstundentermin ausgemacht werden, in dem ein Probevortrag gehalten wird.

(c) Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortragsthemas wird nicht gefordert. Die Slides zum Vortrag sollen eine Woche vorher auf OLAT hochgeladen werden. Werden keine Slides benutzt, soll ein Handout von ein bis zwei Seiten hochgeladen werden.

Ansprechpartner*innen:

Dr. Martin Lüdtke (luedtke@math.uni-frankfurt.de)
Theresa Kumpitsch (kumpitsch@math.uni-frankfurt.de)

Programm

Vortrag 1: Quaternionen

Behnam 19.04.2021

Hamilton führte Quaternionen als eine Fortsetzung des Zahlenbereichs der komplexen Zahlen ein. Es handelt sich um eine vierdimensionale Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$ mit einer nicht-kommutativen Multiplikation. In diesem Vortrag verallgemeinern wir diese Konstruktion für beliebige Körper K der Charakteristik $\neq 2$. Für $a, b \in K^\times$ erhalten wir dadurch eine 4-dimensionale K-Algebra, notiert durch (a, b), welche entweder eine Divisionsalgebra oder isomorph zur Matrixalgebra $M_2(K)$ ist. Andererseits zeigen wir, dass jede 4-dimensionale zentrale K-Algebra isomorph zu einer Quaternionenalgebra ist.

Der Vortrag soll sich weitgehend an [GS17, §1] orientieren. Konkret sollte im Vortrag Folgendes behandelt werden:

- Grundbegriffe einführen, d.h. Definition von *assoziativer K-Algebra mit Eins*[1] und Divisionsalgebra (siehe z.B. [JS06, §4] oder [Ke07, §1.1]).
- Beweise: Die *Hamiltonschen Quaternionen* $\mathbb{H}$ sind eine 4-dimensionale (nicht-kommutative) Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$. Erkläre außerdem, warum $\mathbb{H}$ keine Algebra über $\mathbb{C}$ ist.[2]
- Gib die Definition der *verallgemeinerten Quaternionenalgebra* (a, b) über K mit $a, b \in K^\times$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$ (Definition 1.1.1 in [GS17, §1]) und erkläre, warum die so definierte K-Algebra bis auf Isomorphie nur von den Restklassen von a, b in $K^\times / K^{\times 2}$ abhängt.
- Erkläre, wie man in Charakteristik 2 Quaternionenalgebren definieren kann (Bemerkung 1.1.8).
- Zeige: Eine Quaternionenalgebra (a, b) ist entweder eine Divisionsalgebra oder gespalten, d.h. isomorph zur Matrixalgebra $M_2(K)$ (Lemma 1.1.3 und Prop. 1.1.6). Gib ein Beispiel für eine gespaltene und eine nicht-gespaltene Quaternionenalgebra.
- Definiere das *Zentrum* $Z(A)$ einer K-Algebra A. Erwähne, dass $K \subseteq Z(A)$ und definiere eine *zentrale K-Algebra* als K-Algebra A mit $Z(A) = K$. Zeige, dass wenn A eine Divisionsalgebra ist, so ist $Z(A)$ ein Körper.
- Beweise, dass eine 4-dimensionale zentrale Divisionsalgebra D über K isomorph zu einer Quaternionenalgebra über K ist (Prop. 1.2.1). Dabei zeigt man, dass D eine quadratische Körpererweiterung $K(\sqrt{a})$ von K enthält, sodass $D \otimes_K K(\sqrt{a})$ als $K(\sqrt{a})$-Algebra gespalten ist. Solche quadratischen Erweiterungen können charakterisiert werden (Prop. 1.2.3). Das Tensorprodukt $D \otimes_K K(\sqrt{a})$ darf ad hoc als „Skalarerweiterung" der K-Algebra D zu einer $K(\sqrt{a})$-Algebra aufgefasst werden. Tensorprodukte werden erst im nächsten Vortrag allgemein definiert.

Eine Einführung in Quaternionenalgebren findet sich auch in [JS06, IX.1].

Literatur: [GS17, §1]

Vortrag 2: (Ein) Satz von Wedderburn

Seyfullah 26.04.2021

[1] Im Folgenden nur noch K-Algebra.

[2] Hier kann man erwähnen, dass sogar Folgendes gilt: (1) Alle endlichdimensionalen Divisionsalgebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K sind schon gleich K. (2) Die einzigen endlichdimensionalen Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ sind bis auf Isomorphie $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ (Satz von Frobenius). Dies wird in späteren Vorträgen bewiesen (würde sich aber schon mit Algebra-Wissen beweisen lassen).

In diesem Vortrag wollen wir einen Struktursatz über endlich dimensionale einfache Algebren, auch bekannt als Satz von Wedderburn[3], beweisen, welcher besagt, dass jede solche isomorph zu einem Matrizenring über einer (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Divisionsalgebra ist. Es folgt insbesondere, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K jede einfache zentrale Algebra isomorph zu einer endlich-dimensionalen Matrizenalgebra über K ist. Um diesen Satz zu bewiesen, benötigen wir eine Reihe von neuen Begriffen und Werkzeugen.

Der Vortrag sollte sich weitgehend an [Ke07, §1] oder [GS17, §2.1] orientieren. Es sollte folgendermaßen vorgegangen werden:

- Definiere Links-, Rechts- und beidseitige Ideale in einem (nicht notwendigerweise kommutativen) Ring. Diskutiere diese Begriffe am Beispiel $A = M_{2\times 2}(K)$, wobei K ein Körper sei.
- Definiere „einfacher Ring“ bzw. „einfache K-Algebra“ und zeige:
  (a) Divisionsalgebren (und damit insbesondere nicht-gespaltene Quaternionenalgebren) sind einfach;
  (b) Endomorphismenringe über einer Divisionsalgebra D sind isomorph zu Matrizenringen über D und sind einfach (und damit sind insb. gespaltene Quaternionenalgebren einfach) (siehe [Ke07, §1]).
- Formuliere den Satz von Wedderburn (Satz 1.7 in [Ke07, §1]). Beweise zuerst den Existenz-Teil. Dazu müssen wir minimale Linksideale von $M_{n\times n}(D)$, wobei D eine Divisionsalgebra ist, verstehen (Abschnitt 1.4–5 in [Ke07] bzw. Beispiel 2.1.4 in [GS17]).
- Beweise den Eindeutigkeits-Teil des Struktursatzes. Dazu muss zunächst definiert werden, was ein einfacher Modul über einem Ring ist und das Lemma von Schur bewiesen werden. Sei nun $A = M_{n\times n}(D)$. Zeige, dass alle nicht-trivialen einfachen A-Untermoduln isomorph sind zu D^n [Ke07, §1.8]. Führe den oppositionellen Ring D^{op} ein ([Ke07, §1.2]) und zeige, dass $D^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_A(D^n)$.
- Wiederhole die Definition des Zentrums einer K-Algebra und bestimme das Zentrum von $M_{n\times n}(D)$. Folgere, dass das Zentrum einer endlich-dimensionalen einfachen K-Algebra eine Körpererweiterung von K ist (siehe [Ke07, §2.1–3]).

Literatur: [Ke07, §1–2.3] oder [GS17, §2.1]

Vortrag 3: Tensorprodukte von Algebren

Emily 03.05.2021

In diesem Vortrag geht es darum, das Tensorprodukt einzuführen. Zunächst für Moduln über einem (kommutativen) Ring R. Dann zeigt man, dass das Tensorprodukt zweier R-Algebren (welche insb. R-Moduln sind) wieder eindeutig die Struktur einer R-Algebra besitzt. Ferner werden wir zeigen, dass die Eigenschaften „zentral“ und „einfach“ unter (endlichen) Tensorprodukten erhalten bleiben.

Der Vortrag soll sich weitgehend an [JS06, VII.10, IX.2–3] und [Ke07, §2.4–8] orientieren. Konkret sollte im Vortrag Folgendes behandelt werden:

- Sei R ein kommutativer Ring. Definiere *Tensorprodukte von R-Moduln* über eine universelle Eigenschaft und zeige Existenz und Eindeutigkeit (Lemma 10.2 und Satz 10.3 in [JS06, VII.10]). Diskutiere die Beispiele §10 und gehe insbesondere auf Tensorprodukte freier Moduln ein (Lemma 10.6. und Satz 10.7).

[3] Nicht zu verwechseln mit dem Satz von Wedderburn aus Vortrag 7.

- Zeige, dass das *Tensorprodukt zweier R-Algebren* die Struktur einer R-Algebra besitzt (Satz 2.1 in [JS06, IX.2]) und nenne die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts von Algebren. Diskutiere Beispiele 2.3 und 2.4 in [JS06, IX.2] sowie Lemma 1.5.2 in [GS17, §1] und dessen Korollar.

- Wiederhole den Begriff von *zentraler K-Algebra* und diskutiere die Beispiele $M_{n\times n}(K)$ und Quaternionenalgebren. Zeige, dass das Tensorprodukt zweier zentraler K-Algebren eine zentrale K-Algebra ist (Satz 3.2 in [JS06, IX.3]). Definiere dazu den Zentralisator eines Unterrings einer K-Algebra und zeige Lemma 3.3 (entspricht [Ke07, §2.5]).

- Wiederhole die Definition von einfacher K-Algebra. Diskutiere das Beispiel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ um zu zeigen, dass das Tensorprodukt einfacher K-Algebren i.A. nicht einfach ist. Zeige, dass dies jedoch der Fall ist, sobald eine der beiden Algebren zentral ist (siehe [Ke07, §2.6]).

- Fasse zum Schluss die bisher bekannten Beispiele zentraler einfacher Algebren zusammen (siehe [Ke07, §2.8]).

Literatur: [JS06, VII.10, IX.2-3], [Ke07, §2.6]

Vortrag 4: Die Brauergruppe
Marie 10.05.2021

In diesem Vortrag werden wir endlich dem Titel des Seminars gerecht und reden über die Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ eines Körper K. Diese führen wir hier auf klassische Weise ein. Ihre Elemente definieren wir als Äquivalenzklassen endlich-dimensionaler zentraler einfacher Algebren (auch Azumaya-Algebren über K genannt). Die Äquivalenzrelation definieren wir so, dass wir als Repräsentant jeder Restklasse die eindeutige K-Divisionsalgebra D aus dem Satz von Wedderburn aus Vortrag 2 wählen können. Die Verknüpfung definieren wir mit Hilfe des Tensorprodukts von K-Algebren, das wir im letzten Vortrag eingeführt haben. Das neutrale Element ist $[K]$, wobei diejenigen K-Algebren äquivalent zu K sind, die isomorph zu einer Matrizenalgebra über K sind. Das inverse Element zu jedem Element $[A]$ ist $[A^{\mathrm{op}}]$. Insbesondere werden wir sehen, dass diese Konstruktion funktoriell ist. Genauer heißt das: Für eine Körpererweiterung L/K bekommen wir einen Gruppenhomomorphismus von Brauergruppen $r_{L/K} : \mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L)$ und dieser verträgt sich mit Zwischenkörpern $L/M/K$, also $r_{L/K} = r_{L/M} \circ r_{M/K}$.

Der Vortrag sollte sich an [Ke07, §3] (und [JS06, IX.5]) orientieren. Es soll Folgendes besprochen werden:

- Wiederhole kurz die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts von K-Algebren (Vortrag 3). Nutze diese um zu zeigen, dass für eine Azumaya-Algebra A über K gilt, dass $A \otimes_K A^{\mathrm{op}} \cong M_{n\times n}(K)$ mit $n = \dim_K A$ (siehe [Ke07, §3.3]).

- Definiere „Ähnlichkeit“ auf der Menge der (Isomorphieklassen von) Azumaya-Algebren und rechne nach, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Zeige, dass jede Äquivalenzklasse genau eine (zentrale) Divisionsalgebra enthält und insbesondere $A \sim K$, wenn $A \cong M_{n\times n}(K)$ (siehe [Ke07, §3.3] oder Bemerkung 5.3 in [JS06, IX.5]).

- Definiere die *Brauergruppe von K* als Menge von Äquivalenzklassen von Azumaya-Algebren $[A]$ über K und Verknüpfung $[A] \cdot [B] := [A \otimes_K B]$. Erkläre, warum diese Verknüpfung wohldefiniert ist, und rechne die Gruppenaxiome nach (Siehe [JS06, IX.5]). Überlege dir außerdem, warum wir die Verknüpfung nicht auf den Repräsentanten durch Divisionsalgebren definieren können (Bemerkung in [JS06, IX.5]).

- Gib das einzige Beispiel dieses Vortrags: Die Brauergruppe eines algebraisch abgeschlossenen Körpers ist trivial. Zeige dafür Satz 1.10 in [JS06, IX.1]. Erkläre außerdem, dass (nichtgespaltene) Quaternionenalgebren über K Elemente der Brauergruppe von Ordnung 2 liefern (siehe Beispiel 5.5 in [JS06, IX.5]).

- Zeige, dass sich die Brauergruppe *funktoriell*[4] verhält. Definiere dazu für eine Körpererweiterung L/K die *Restriktion* $r_{L/K} : \mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L)$. Überlege dir, warum diese Bezeichnung Sinn ergibt. Definiere den Kern von $r_{L/K}$ als *relative Brauergruppe* $\mathrm{Br}(L/K)$. Erkläre den Begriff *Zerfällungskörper* (siehe [Ke07, §3.7]). Erkläre außerdem, warum $\overline{K}$ ein Zerfällungskörper für alle Azumaya-Algebren ist (z.B. Bemerkung 5.8 in [JS06, IX.5]).

- Gib Satz 3.8 aus [Ke07] an (Beweis im Wesentlichen schon geführt). Zeige damit, dass die Dimension einer Azumaya-Algebra A eine Quadratzahl ist. Definiere schließlich Grad und Index von A und erkläre ihren Zusammenhang [Ke07, §3.8–10].

Literatur: [Ke07, §3]

Vortrag 5: Skolem–Noether und der Zentralisatorsatz
Yanik 17.05.2021

In diesem Vortrag werden weitere Eigenschaften von Azumaya-Algebren untersucht. Genauer zeigen wir, dass alle K-Algebrahomomorphismen von einer endlich-dimensionalen K-Algebra in eine Azumaya-Algebra über K zueinander konjugiert sind. Dies ist bekannt als der Satz von Skolem–Noether. Damit können wir z.B. folgern, dass alle Automorphismen einer Azumaya-Algebra A innere Automorphismen sind. Ferner zeigen wir, dass der Zentralisator $Z_A(B)$ einer einfachen (zentralen) Unteralgebra B von A eine einfache (zentrale) Algebra über K ist (und insbesondere im zentralen Fall $Z_A(B) \otimes_K B$ als K-Algebra isomorph zu A ist). Es gilt ferner die folgende Dimensionsbeziehung

$$\dim_K A = (\dim_K Z_A(B))(\dim_K B).$$

Ist $B = L$ eine Körpererweiterung von K, so ist $Z_A(L)$ eine Azumaya-Algebra über L und $[A \otimes_K L] = [Z_A(L)]$ in $\mathrm{Br}(L)$. Ist dies die triviale Klasse in $\mathrm{Br}(L)$, d.h. $Z_A(L) = L$, so ist L ein Zerfällungskörper von A.

Der Vortrag sollte sich an [Ke07, §4] und [JS06, IX.6] orientieren. Konkret sind folgende Themen zu besprechen:

- Als erstes soll der Satz von Skolem–Noether [Ke07, §4.2] bewiesen werden. Gegeben eine Azumaya-Algebra A über K und eine endlich-dimensionale einfache K-Algebra B vergleicht dieser Satz K-Algebrahomomorphismen $f, g : B \to A$. Dazu betrachtet man die K-Algebra $C = B \otimes_K A^{\mathrm{op}}$ (Überlege dir wieso!). Wiederhole, warum diese endlich-dimensional und einfach über K ist. Folgere, dass zwei endlich-dimensionale C-Moduln genau dann isomorph sind, wenn sie die gleiche Dimension über K haben. Zeige dazu zuerst das Modullemma aus [Ke07, §4.1] (oder gehe so vor wie im Beweis in [JS06, IX.6]). Die Idee ist nun, dass die Abbildungen f, g zwei verschiedene C-Modulstrukturen auf A beschreiben, welche als solche isomorph sein müssen. Der Rest folgt durch Rechnen.

- Wende den Satz von Skolem–Noether an auf: (1) Zueinander isomorphe einfache Unteralgebren einer Azumaya-Algebra (Korollar 6.2 in [JS06, IX.6]) und (2) Automorphismen von Azumaya-Algebren ([Ke07, §4.3] bzw. Korollar 6.3 in [JS06, IX.6]).

- Wiederhole die Definition von Zentralisator (Vortrag 3) und bearbeite Aufgabe 6 aus [Ke07, §2.9]. Wiederhole die Aussage von Lemma 3.3 in [JS06, IX.3].

- Beweise den Zentralisatorsatz (Satz 6.4 in [JS06, IX.6] oder [Ke07, §4.4–5]).

[4] Dieser Begriff kommt aus der Kategorientheorie. Siehe dazu `https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik)`. Dieser „abstract nonsense“ muss an dieser Stelle aber nicht eingeführt weden.

- Wende den Zentralisatorsatz auf Körpererweiterungen L/K in einer Azumaya-Algebra A über K an und zeige die daraus resultierende Dimensionsbeziehung (Satz 6.5 in [JS06, IX.6] oder [Ke07, §4.6–7]). Diskutiere insbesondere die daraus folgende (hinreichende) Bedingung (nämlich $Z_A(L) = L$ oder äquivalent $\mathrm{grad}_K A = [L : K]$) dafür, dass L ein Zerfällungskörper von A ist.

Literatur: [Ke07, §4] und [JS06, IX.6]

⚠ 24.05.2021: Kein Seminar (Pfingstmontag)

Vortrag 6: Zerfällungskörper und maximale Teilkörper

Milan 31.05.2021

In diesem Vortrag beschäftigen wir uns mit maximalen Teilkörpern von Divisionsalgebren. Wir wissen bereits, dass jede zentrale Divisionsalgebra D über einer endlichen Körpererweiterung zerfällt. Mithilfe des Zentralisatorsatzes des vorherigen Vortrags zeigen wir, dass jeder maximale Teilkörper L einer zentralen Divisionsalgebra D ein Zerfällungskörper ist. Für eine allgemeine Azumaya-Algebra A über K existiert damit stets ein Zerfällungskörper L mit $[L : K] = \mathrm{ind}_K A$. Weiter zeigen wir, dass der Zerfällungskörper sogar separabel über K gewählt werden kann. Insbesondere ist die Brauergruppe eines separabel abgeschlossenen Körpers trivial.

Der Vortrag sollte sich an [Ke07, §5] und [JS06, IX.7] orientieren. Konkret sind folgende Themen zu besprechen:

- Sei A eine Azumaya-Algebra über K. Definiere *maximale Teilkörper* und *strikt maximale Teilkörper* von A (Definitionen 7.1 und 7.2 in [JS06, IX.7]). Zeige, dass strikt maximale Teilkörper maximal sind, die Umkehrung aber im Allgemeinen nicht gilt (Bemerkung 7.5 in [JS06]). Folgere aus den Ergebnissen es vorherigen Vortrags, dass strikt maximale Teilkörper Zerfällungskörper sind.

- Zeige, dass jeder maximale Teilkörper einer Divisionsalgebra strikt maximal und damit ein Zerfällungskörper ist (Satz 7.2 in [JS06]; Satz 5.4 in [Ke07]). Folgere, dass jede Azumaya-Algebra A über K einen Zerfällungskörper L mit $[L : K] = \mathrm{ind}_K A$ besitzt (Korollar 7.8 in [JS06]; Korollar 5.4 in [Ke07])

- Sei D eine endlichdimensionale, zentrale Divisionsalgebra über K. Zeige, dass D einen maximalen Teilkörper besitzt, der separabel über K ist (Satz 7.9 in [JS06]). Wiederhole dazu die benötigten Tatsachen über separable Körpererweiterungen.

- Folgere, dass jede Azumaya-Algebra über K über einer endlichen Galoiserweiterung L/K zerfällt (Satz 5.7 in [Ke07]). Folgere weiter, dass die Brauergruppe eines separabel abgeschlossenen Körpers trivial ist (Satz 5.8).

Literatur: [Ke07, §5] und [JS06, IX.7]

Vortrag 7: Brauergruppe von $\mathbb{F}_q$ und $\mathbb{R}$

Xiaoyu 07.06.2021

In diesem Vortrag wollen wir die gesehenen Eigenschaften von Divisionsalgebren benutzen, um die Brauergruppe eines endlichen Körpers $\mathbb{F}_q$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu bestimmen. Genauer gilt $\mathrm{Br}(\mathbb{F}_q) = 0$ als Folgerung des Satzes von Wedderburn, dass jeder endliche Schiefkörper kommutativ ist; und es gilt $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei das nichttriviale Element durch die Hamilton-Quaternionen $\mathbb{H}$ dargestellt wird. In beiden Beweisen werden maximale Teilkörper benutzt.

Der Vortrag sollte sich an [Ke07, §6] orientieren. Konkret sind folgende Themen zu besprechen:

- Zeige den Satz von Wedderburn über endliche Schiefkörper (Satz 6.2 in [Ke07]). Hierfür muss das gruppentheoretische Lemma 6.1 gezeigt werden. Folgere, dass die Brauergruppe eines endlichen Körpers trivial ist (Korollar 6.3).

- Zeige den Satz von Frobenius, dass die Hamilton-Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ bis auf Isomorphie die einzige nicht-kommutative endlichdimensionale Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$ ist (Satz 6.5). Folgere, dass $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt (Satz 6.6).

Literatur: [Ke07, §6.1–3, §6.5–6]

Vortrag 8: Kohomologische Definition von $\mathrm{Br}(K)$ – Teil 1

Tim 14.06.2021

In diesem Vortrag wollen wir eine modernere Interpretation der Brauergruppe mit Hilfe von Galoiskohomologie kennenlernen. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Gruppe G. Wir bezeichnen mit $\mathrm{CSA}_n(L/K)$ die Menge der Isomorphieklassen von zentral einfachen Algebren A vom Grad n über K, welche über L zerfallen: $A \otimes_K L \cong \mathrm{M}_n(L)$. Eine solche K-Algebra wird also nach Skalarerweiterung zur Matrixalgebra $\mathrm{M}_n(K)$ isomorph. Man spricht von einer *getwisteten Form* von $\mathrm{M}_n(K)$. Die Theorie des Galoisabstiegs liefert eine allgemeine Beschreibung von gewisteten Formen mittels Gruppenkohomologie. Aus einem Isomorphismus $A \otimes_K L \cong \mathrm{M}_n(L)$ konstruiert man eine Abbildung $G \to \mathrm{PGL}_n(L)$, $a \mapsto a_\sigma$ mit der *Kozykeleigenschaft* $a_{\sigma\tau} = a_\sigma \sigma(a_\tau)$, welche die Algebra A vollständig beschreibt. Bei der Wahl eines anderen Isomorphismus $A \otimes_K L \cong \mathrm{M}_n(L)$ ändert sich der Kozykel auf kontrollierbare Weise: es ergibt sich ein *kohomologer* Kozykel. Die Menge der Kohomologieklassen von Kozykeln wird mit $H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L))$ bezeichnet.

Ziel des Vortrags ist eine allgemeine Einführung in die Theorie der getwisteten Formen, als Anwendung das Herleiten der Bijektion $\mathrm{CSA}_n(L/K) \cong H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L))$ und durch Übergang $n \to \infty$ schließlich die kohomologische Beschreibung der relativen Brauergruppe: $\mathrm{Br}(L/K) \cong H^1(G, \mathrm{PGL}_\infty(L))$.

Der Vortrag sollte sich an [GS17, §2.3–2.4] orientieren. Konkret sind folgende Themen zu besprechen:

- Definiere den Begriff des *Vektorraums mit Tensor vom Typ* (p, q) [GS17, §2.3]. Erkläre als Beispiel, dass eine K-Algebra sich als Vektorraum mit Tensor vom Typ $(1,2)$ auffassen lässt.

- Sei (V, Φ) ein Vektorraum mit Tensor. Definiere, was eine *L/K-getwistete Form* von (V, Φ) ist. Erkläre, wie sich zentral einfache Algebren als getwistete Formen von Matrixalgebren auffassen lassen.

- Zeige, wie sich aus einer L/K-gewisteten Form von (V, Φ) Kozykel $G \to \mathrm{Aut}_L(\Phi)$ konstruieren lassen. Definiere die Kohomologiemenge $H^1(G, A)$ allgemein für A eine Gruppe mit G-Wirkung (Definition 2.3.2). Die Menge der Isomorphieklassen von L/K-getwisteten Formen von (V, Φ) sei mit $\mathrm{TF}_L(V, \Phi)$ bezeichnet. Formuliere den Satz, dass die konstruierte Abbildung eine Bijektion $\mathrm{TF}_L(V, \Phi) \cong H^1(G, \mathrm{Aut}_L(\Phi))$ ist (Satz 2.3.3).

- Bevor der Satz bewiesen wird, zeige wie sich Hilberts Satz 90 als einfache Folgerung ergibt: $H^1(G, \mathrm{GL}_n(L)) = \{1\}$ (Beispiel 2.3.4).

- Beweise den Satz. Zeige dazu zunächst das folgende Lemma: Für einen L-Vektorraum V mit semilinearer G-Wirkung ist die Abbildung $V^G \otimes_K L \to V$ ein Isomorphismus (Lemma 2.3.8).[5]

- Folgere die Bijektion $\mathrm{CSA}_n(L/K) \cong H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L))$ (Satz 2.4.3). Für die Tatsache, dass jeder Automorphismus von $\mathrm{M}_n(L)$ durch Konjugation mit einer invertierbaren Matrix gegeben ist (Lemma 2.4.1) kann der Satz von Skolem–Noether benutzt werden.

[5] Der Beweis von Lemma 2.3.8 in der ersten Ausgabe von [GS17] enthält einen Fehler. Siehe [Po17], Lemma 1.3.10 für einen korrekten Beweis. Der Begriff der *étalen k-Algebra*, der dort benutzt wird, muss nicht eingeführt werden.

- Für natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ definiere die Abbildung

  $$\lambda_{mn}\colon H^1(G, \mathrm{PGL}_m(L)) \to H^1(G, \mathrm{PGL}_{mn}(L)).$$

  Erkläre, dass λ_{mn} der Abbildung $A \mapsto A \otimes_K \mathrm{M}_n(L)$ auf Isomorphieklassen einfacher zentraler Algebren entspricht (ohne Beweis). Folgere aus dem Satz von Wedderburn, dass λ_{mn} injektiv ist (Lemma 2.4.5). Definiere $H^1(G, \mathrm{PGL}_\infty(L))$ als Vereinigung aller $H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L))$ mittels der λ_{mn} und zeige, dass wir einen wohldefinierten Isomorphismus $\mathrm{Br}(L/K) \cong H^1(G, \mathrm{PGL}_\infty(L))$ haben.

Literatur: [GS17, §2.3–2.4]

Vortrag 9: Kohomologische Definition von $\mathrm{Br}(K)$ **– Teil 2**
Leonie 21.06.2021

In diesem Vortrag wollen wir eine zweite kohomologische Interpretation der Brauergruppe kennenlernen. Für eine endliche Galoiserweiterung L/K mit Gruppe G wird eine Kohomologiegruppe $H^2(G, L^\times)$ definiert und ein Isomorphismus $\mathrm{Br}(L/K) \cong H^2(G, L^\times)$ für die relative Brauergruppe konstruiert. Hierbei spielen *verschränkte Produkte* eine Rolle, die zu Beginn eingeführt werden sollen. Eine zentral einfache K-Algebra A vom Grad n heißt verschränktes Produkt, wenn A einen galoisschen Teilkörper L/K vom Grad n enthält. Für eine solche Algebra lässt sich ein Element von $H^2(G, L^\times)$ konstruieren. Umgekehrt kann zu jedem Element von $H^2(G, L^\times)$ ein verschränktes Produkt konstruiert werden. Jede zentral einfache K-Algebra, für die L ein Zerfällungskörper ist, ist ähnlich zu einem verschränkten Produkt über L.

Die verschiedenen äquivalenten Beschreibungen der (relativen) Brauergruppe lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz. *Sei L/K eine galoissche Körpererweiterung vom Grad n mit Gruppe G. Es gibt kanonische Bijektionen (bzw. Gruppenisomorphismen) zwischen:*

(a) $\mathrm{Br}(L/K)$;

(b) $\mathrm{CSA}_n(L/K)$;

(c) $H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L))$;

(d) $H^2(G, L^\times)$.

Für den Vortrag soll wie folgt vorgegangen werden:

- Definiere *verschränkte Produkte* [Ke07, §7.1]. Zeige, dass jede zentral einfache K-Algebra, die über L zerfällt, zu einem verschränkten Produkt ähnlich ist ([Ke07, Satz 5.9], [Lee, Cor. 15]). Dies benutzt den Zentralisatorsatz aus Vortrag 5.

- Konstruiere zu einem verschränkten Produkt eine Abbildung $f\colon G \times G \to L^\times$. Zeige, dass diese die Kozykeleigenschaft

  $$f(\rho, \sigma) f(\rho\sigma, \tau) = \rho(f(\sigma, \tau)) f(\rho, \sigma\tau) \quad \text{für } \rho, \sigma, \tau \in G$$

  erfüllt und wohldefiniert ist bis auf *Koränder* [Lee, §4.2].

- Für eine abelsche Gruppe M mit einer G-Wirkung durch Gruppenhomomorphismen definiere allgemein $H^2(G, M)$ als Gruppe von Kozykeln modulo Koränder. Eine verschränkte Algebra liefert somit ein Element von $H^2(G, L^\times)$.

- Zeige, wie sich aus einem Kozykel $f\colon G\times G\to L^\times$ umgekehrt eine verschränkte Algebra (L,G,f) konstruieren lässt ([Ke07, §7.5], [Lee, §4.2]). Kohomologe Kozykel liefern isomorphe Algebren und die resultierende Abbildung $H^2(G,L^\times)\to \mathrm{Br}(L/K)$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Hier kann eine geeignete Auswahl getroffen werden, welche der Eigenschaften nachgerechnet werden.

- Formuliere den obigen Satz und fasse die verschiedenen Beschreibungen der relativen Brauergruppe und ihre Beziehungen zueinander abschließend zusammen.

Literatur: [Lee, §4.1–4.2], [Ke07, §7–8], [JS06, §8]

Literatur

[GS17] P. Gille and T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge University Press, 2017.

[Ke07] I. Kersten, *Brauergruppen*, Universitätsverlag Göttingen, 2007. (Online abrufbar unter: https://www.univerlag.uni-goettingen.de/bitstream/handle/3/isbn-978-3-938616-89-5/brauergruppen.pdf)

[JS06] J. C. Jantzen und J. Schwermer, *Algebra*, Springer, 2. Auflage, 2014.

[Po17] B. Poonen, *Rational points on varieties.* Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2017. Online abrufbar unter: https://math.mit.edu/~poonen/papers/Qpoints.pdf

[Lee] S. Lee, *Cohomological interpretation of Brauer Groups*. Online abrufbar unter: https://math.berkeley.edu/~seewoo5/BG.pdf