Seminar

# Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Sommersemester 2020

Goethe-Universität Frankfurt am Main — Prof. Dr. Jakob Stix
Institut für Mathematik — Theresa Kumpitsch

## Motivation dieses Seminars

Darstellungstheorie von Gruppen spielt nicht nur in vielen Gebieten der Mathematik, sondern z.B. auch in Theoretischer Physik und Quantenchemie eine wichtige Rolle. Die Grundidee ist es, Elemente einer Gruppe durch lineare Transformationen auf einem Vektorraum darzustellen. Die Gruppe operiert durch Symmetrien auf diesem Vektorraum. Präziser ausgedrückt, ist für eine Gruppe $G$ eine (lineare) Darstellung $\rho$ ein Homomorphismus $G \to \mathrm{GL}(V)$, wobei $V$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Der Vorteil davon ist, dass Eigenschaften abstrakter Gruppen nun durch Lineare Algebra studiert werden können.

## Organisatorisches

**Termin:** Montag, 14-16 Uhr in Raum 309 (Ecksaal), Robert-Mayer-Str. 6-8

**Zielgruppe:** Die Veranstaltung richtet sich primär an Bachelorstudierende ab dem 3. Semester und ist dem Modul BaM-Alg (Algebra und Zahlentheorie) zugeordnet. Kenntnisse aus der Vorlesung „Algebra" sind von Vorteil, aber nicht notwendig. Lehramtsstudierende mit fundierten LA 1+2-Kenntnissen können einen Vortrag im ersten Teil des Seminars übernehmen und als L3-Seminar (M12-S) anrechnen lassen.

**Studienleistung:** Für diese Studienleistung müssen Studierende:

(a) Regelmäßig (und aktiv) am Seminar teilnehmen;

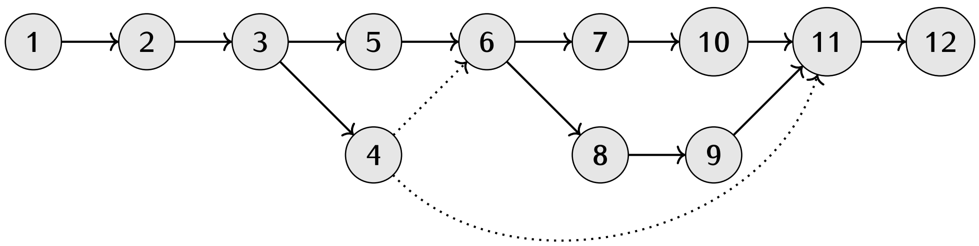
(b) Einen ca. 1,5-stündigen Vortrag als Tafelvortrag halten. Ca. zwei Wochen vor dem Vortrag soll ein Sprechstundentermin ausgemacht werden, indem die Gliederung des Vortrags präsentiert sowie Verständnisfragen geklärt werden.

(c) Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortragsthemas in LaTeX abgeben. Eine erste Version der Ausarbeitung soll spätestens eine Woche vor dem Vortrag per Mail abgegeben werden. Diese wird dann bis zur nächsten Sitzung korrigiert und man erhält die Möglichkeiten, Korrekturen und Anmerkungen für die Endversion umzusetzen. Diese muss dann spätestens eine Woche nach dem Vortrag abgeben werden.

**Ansprechpartnerin:** Theresa Kumpitsch (kumpitsch@math.uni-frankfurt.de)

## Programm

Die Hauptquelle ist [Ser77] und, falls nicht anders spezifiziert, beziehen sich alle Verweise darauf. Das Programm ist weitgehend linear aufgebaut, d.h. die Vorträge bauen aufeinander auf. Genauer bestehen folgende Abhängigkeiten zwischen den Vorträgen:




Ab Vortrag 6 sind Kenntnisse aus der Vorlesung Algebra von Vorteil. Für alle Vorträge sind solide LA-Kenntnisse sowie gute Kenntnisse aus Lineare Algebra 2 (Geometrie und Grundlagen der Algebra notwendig.

**Vortrag 1: Grundlagen zu linearen Darstellungen**
N.N. 20.04.2020

Für eine Gruppe $G$ ist eine (lineare) Darstellung $\rho$ ein Homomorphismus $G \to \mathrm{GL}(V)$, wobei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. So ist es möglich, Eigenschaften abstrakter Gruppen durch Lineare Algebra zu studieren. In diesem Vortrag werden die grundlegenden Eigenschaften und Unterobjekte diskutiert und vorgeführt, dass wir Teile der Theorie schon aus der Linearen Algebra kennen. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Grundlagen (I.1.1-2): lineare Darstellung, Grad einer Darstellung und Isomorphie von Darstellungen, sowie Beispiele zu Darstellungen von Grad 1, reguläre Darstellung, Permutationsdarstellungen;
- Unterdarstellungen (I.1.3): Definition, stabiler Unterraum und Existenz des stabilen Komplements (Thm. 1) inklusive Beweis, ein anderer Beweis für Vektorräume mit invariantem Skalarprodukt und direkte Summen von Darstellungen;
- Irreduzible Darstellungen (I.1.4): Definition und Beweis, dass jede Darstellung direkte Summe irreduzibler Darstellungen ist (nicht eindeutig!);
- Stellen Sie den folgenden Bezug zur Linearen Algebra her: Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum,
$$\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
ein Gruppenhomomorphismus und sei $\rho(1) =: A$. Dann ist $A$ genau dann diagonalisierbar, wenn $(\rho, V)$ eine direkte Summe 1-dimensionaler Darstellungen ist.

Für einen einfacheren Einstieg mit mehr Beispielen, siehe auch [JL01, §3].

**Literatur:** [Ser77, §I.1.1-4]

**Vortrag 2: Tensorprodukt von Darstellungen und Charaktere**
N.N. 27.04.2020

Neben der direkten Summen-Operation auf Darstellungen, die wir in Vortrag 1 kennengelernt haben, gibt es auch eine Multiplikation, nämlich das Tensorprodukt. Dieses soll im Vortrag eingeführt werden. Wir lernen außerdem eine wichtige Invariante von Darstellungen kennen: ihre Spur, auch *Charakter* der Darstellung genannt. In diesem Vortrag soll ergründet werden, inwiefern diese die dazugehörige Darstellung tatsächlich charakterisieren. Insbesondere wird uns diese Theorie ein sehr praktisches Irreduzibilitätskriterium liefern. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Tensorprodukt zweier Darstellungen (I.1.5): Definition und Konstruktion;
- Zweite symmetrische und alternierende Potenzen (I.1.6);
- Charakter einer Darstellung (I.2.1): Definition, erste Eigenschaften (Proposition 1) , Charaktere einer direkten Summe oder eines Tensorprodukts (Prop. 2 in I.2.2), die Charaktere zu symmetrischen und alternierenden Summen, die duale Darstellung und ihre Charaktere (Exe. 2.3);
- Erklären Sie im Hinblick auf die Vorlesung Algebra (falls Sie diese besucht haben), dass das, was dort als Charakter bezeichnet wurde, nämlich Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{C}^\times$, genau 1-dimensionale komplexe Darstellungen sind. Erinnern Sie ggf. an Beispiele aus der Vorlesung.
- Lemma von Schur (I.2.2): Aussage (Prop. 4) und Beweis, Korollar 1.

Für einen einfacheren Einstieg mit mehr Beispielen, siehe auch [JL01, §9, 13].

**Literatur:** [Ser77, I.1.5, I.2.1-2]

**Vortrag 3: Orthogonalitätsrelationen**
N.N. 04.05.2020

In Vortrag 2 wurden Charaktere von Darstellungen definiert. In diesem Vortrag werden wir ein Skalarprodukt auf den Klassenfunktionen von $G$ definieren und zeigen, dass Charaktere zu irreduziblen Darstellungen diesbezüglich normiert und zueinander orthogonal sind. Es gilt sogar noch mehr: Zum einen ist ein Charakter zu einer Darstellung $V$ genau dann normiert, wenn $V$ irreduzibel ist, was uns ein praktisches Irreduzibilitätskriterium liefert. Zum anderen bilden die irreduziblen Charaktere sogar eine ONB des Raums der Klassenfunktionen von $G$. Dazu muss zunächst die besondere Rolle der aus Vortrag 1 bekannten regulären Darstellung verstanden werden: Jede irreduzible Darstellung ist eine Unterdarstellung der regulären Darstellung. Wir werden außerdem sehen, dass die Anzahl der irreduziblen Darstellungen der Anzahl von Konjugationsklassen entspricht. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Rechnen im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(G, \mathbb{C})$: In der Vorlesung Geometrie wurden Skalarprodukte auf $\mathbb{R}$-Vektorräumen definiert. Auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $V$ kann es so etwas nicht geben: Nimmt man an, es existiere ein Skalarprodukt auf $V$, bekommt man für alle $v \neq 0$ einen Widerspruch durch $0 < \langle iv, iv \rangle = -\langle v, v \rangle < 0$. Es lässt sich auf $V$ jedoch ein sog. hermitesches Skalarprodukt definieren.[1] Das Standardbeispiel hierfür ist $V = \mathbb{C}^n$ mit $\langle v, w \rangle = \sum v_i \overline{w_i}$ für $v, w \in V$. Erklären Sie in ihrem Vortrag, was ein hermitesches Skalarprodukt ist, und zeigen Sie, dass $(\phi \mid \psi) = \frac{1}{\#G} \sum_{s \in G} \phi(s)\overline{\psi(s)}$ auf $\mathrm{Abb}(G, \mathbb{C})$ ein solches definiert. Die Matrixkoeffizienten $r_{ij}$ einer Darstellung $\rho$ sollten als Element von $\mathrm{Abb}(G, \mathbb{C})$ aufgefasst werden. Diese Matrixdarstellung wird im Beweis der Orthogonalitätsrelationen wichtig, da konkrete Skalarprodukte berechnet werden müssen. Wiederholen Sie dazu insbesondere, weshalb durch

[1] Siehe z.B. `http://mathworld.wolfram.com/HermitianInnerProduct.html` für genaue Definition

passende Basiswahl gewährleistet werden kann, dass die Matrizen $(r_{ij}(s))$ unitär sind (siehe I.1.3 bzw. Vortrag 1);

- Korollare zum Lemma von Schur (I.2.2): Korollar 2 und 3 (mit Hilfe des zuvor definierten Skalarprodukts formulieren, siehe Bemerkung auf S.14);
- Orthogonalitätsrelationen (I.2.3, siehe auch [Moe13, 4.1]): Charaktere irreduzibler Darstellungen haben Norm 1, und je zwei verschiedene irreduzible Charaktere sind orthogonal (Thm. 3), Zerlegung einer Darstellung in irreduzible Komponenten (Thm. 4) mit Korollaren und Irreduzibilitätskriterium (Thm. 5);
- Zerlegung der regulären Darstellung (I.2.4): Notation einführen, Charakter der regulären Darstellung bestimmen (Prop. 5), Korollare und Zusammenhang mit irreduziblen Darstellungen der Gruppe diskutieren;
- Anzahl der irreduziblen Darstellungen (I.2.5): Klassenfunktion definieren (siehe I.2.1), Mithilfe von Prop. 6 das Skalarprodukt $(f \mid \chi^*)$ angeben, irreduzible Charaktere bilden eine (Orthonormal-)basis des Raums der Klassenfunktionen (Thm. 6), Aussage nutzen, um zu folgern, dass die Anzahl irreduzibler Darstellungen einer Gruppe $G$ gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von $G$ ist.

Für einen einfacheren Einstieg mit mehr Beispielen, siehe auch [JL01, §13,15].

**Literatur:** [Ser77, I.2.3-5]

**Vortrag 4: Charaktertafeln und kanonische Zerlegungen von Darstellungen**
N.N. 11.05.2020

Mit dem Wissen aus Vortrag 3 sollen nun irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen studiert werden. Dies tun wir in diesem Vortrag mit Hilfe von Charaktertafeln. In diesem Vortrag soll außerdem die Möglichkeit diskutiert werden, Darstellungen eindeutig zu zerlegen. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Charaktertafel (siehe [JL01, §16] und [Moe13, 4.2]): Definition und erste konkrete Beispiele (z.B. $S_3$), Eigenschaften;
- Konsequenzen für abelsche Gruppen (I.3.1): Abschätzung für den Grad einer irreduziblen Darstellung von einer Gruppe mit einer abelschen Untergruppe (Thm. 9 + Korollar);
- Zyklische Gruppen (I.5.1): Thm. 9, nutzen um Beispiel zu diskutieren;
- Erinnerung an die (uneindeutige) Zerlegung in irreduzible Darstellungen aus Vortrag 1 und Weiterführung des LA-Beispiels: Seien $V_\lambda$ die Eigenräume zu den Eigenwerten von $A$. Erklären Sie, dass es bei $\dim V_\lambda > 1$ keine eindeutige Zerlegung in 1-dimensionale Darstellungen gibt;
- Kanonische Zerlegung in isotypische Komponenten (I.2.6): Definition und Eigenschaften der kanonischen Zerlegung und Beispiel;
- (falls Zeit ist) explizite Konstruktion (I.2.7).

**Literatur:** [Ser77, I.2.6-7, I.3.1, I.5.1]

**Vortrag 5: Produkte von Gruppen und induzierte Darstellungen I**

N.N. 18.05.2020

In Vortrag 1 und 2 wurde diskutiert, was es bedeutet, Darstellungen einer Gruppe $G$ zu addieren (direkte Summe) und zu multiplizieren (Tensorprodukt). In diesem Vortrag wird diskutiert, wie Darstellungen eines Produkts von Gruppen $G_1 \times G_2$ aussehen. Wir untersuchen nun außerdem den Übergang von Darstellungen einer Gruppe $G$ zu Darstellungen einer Untergruppe $H \subseteq G$: Eine Darstellung von $G$ lässt sich einfach zu einer Darstellung von $H$ einschränken. Die Umkehrung, Darstellungen von $G$ aus denen von $H$ zu gewinnen, ist interessanter (und etwas schwieriger). Dies soll in einer „universellen" Weise geschehen. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Produkt zweier Gruppen und dessen Darstellungen (II.3.2);
- Induzierte Darstellungen (II.3.3): Definition von induzierten Darstellungen und Beispiele, Existenz und Eindeutigkeit (Thm. 11);
- Charakter einer induzierten Darstellung (II.3.3);
- Jede irreduzible Darstellung von $G$ ist enthalten in einer Darstellung, die von einer irreduziblen Darstellung von $H$ induziert ist (Ex. 3.5 in II.3.3): Aufgabe lösen und daraus einen alternativen Beweis herleiten für die Abschätzung des Grads einer irreduziblen Darstellung von einer Gruppe mit einer abelschen Untergruppe (Kor. zu Thm. 9 in I.3.1, siehe Vortrag 4);
- Diedergruppe $D_n$ (I.5.3): Beispiel diskutieren.

**Literatur:** [Ser77, §I.3.2-3, I.5.3]

**Vortrag 6: Die Gruppenalgebra und induzierte Darstellungen**

N.N. 25.05.2020

In diesem Vortag soll die Gruppenalgebra $K[G]$ eingeführt werden. Diese ist in gewisser Weise eine Verallgemeinerung einer gegebenen Gruppe $G$: ein Element von $K[G]$ ist eine gewichtete Summe von Elementen von $G$. Es stellt sich heraus, dass $K[G]$-Moduln genau zu den linearen Darstellungen von $G$ über $K$ korrespondieren. Insbesondere werden wir zeigen, dass für eine endliche Gruppe $G$ die Gruppenalgebra $\mathbb{C}[G]$ halbeinfach ist. Abschließend betrachten wir eine alternative Definition der induzierten Darstellung mit Hilfe der Gruppenalgebra. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Darstellung von Moduln (II.6.1, siehe auch [JL01, §6]): Definition der Gruppenalgebra $K[G]$, lineare Darstellungen als $K[G]$-Linksmoduln, Halbeinfachheit (Prop. 9);
- Verbinde den Begriff der Halbeinfachheit mit dem Begriff der Diagonalisierbarkeit im LA-Beispiel aus Vortrag 1;
- Zerlegung von $\mathbb{C}[G]$ (II.6.2, siehe auch [JL01, §10])) Zerlegung als Produkt von Matrizenalgebren (Prop. 10), die Fourier-Umkehrformel (Prop. 11);
- Zentrum von $\mathbb{C}[G]$ (II.6.3): Erinnerung an die Definition und zeigen, dass das Zentrum isomorph zur $\mathbb{C}$-Algebra $\mathbb{C}^h$ (als Ring mit komponentenweiser Multiplikation) ist, wobei $h$ die Anzahl der Klassen von $G$ ist (Prop. 12 und 13);
- Induzierte Darstellungen (II.7.1): Erinnerung an die Definition induzierter Darstellungen (siehe Vortrag 5), alternative Definition induzierter Darstellungen via Gruppenalgebra (Prop. 18) und Eigenschaften (Bemerkungen), Prop. 19 erklären.

**Literatur:** [Ser77, II.6.1–6.3, II.7.1]

**Vortrag 7: Universelle Eigenschaft induzierter Darstellungen**
N.N. 08.06.2020

Induzierte Darstellungen erfüllen eine universelle Eigenschaft: Sei $G$ eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe, $W$ eine Darstellung von $H$ und $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ die davon induzierte Darstellung auf $G$. Dannn existiert eine $H$-äquivariante lineare Abbildung $j\colon W \to \mathrm{Ind}_H^G(W)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle Darstellungen $V$ von $G$ und lineare Abbildungen $f\colon W \to \mathrm{Res}_H^G(V)$, gibt es genau eine $G$-equivariante lineare Abbildung $\widehat{f}\colon \mathrm{Ind}_H^G(W) \to V$ mit $\widehat{f}j = f$. Die Frobeniusreziprozität, welche die Dualität von Restriktion und Induktion in der Sprache der Charaktertheorie beschreibt – genauer sagt sie, dass $\mathrm{Ind}_H^G$ und $\mathrm{Res}_H^G$ adjungierte Funktoren sind – ist nur eine Umformulierung dieser Eigenschaft. In diesem Vortrag sollen diese beiden Sichtweisen erklärt werden. Abschließend wird ein Kriterium dafür gegeben, wann eine induzierte Darstellung irreduzibel ist. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Erklären Sie die oben beschriebene universelle Eigenschaft induzierter Darstellungen;
- Induzierte Klassenfunktionen (II.7.2): Wiederholung der Definition einer Klassenfunktion (siehe II.2.5), induzierte Klassenfunktion und ihre Eigenschaften (Prop. 20);
- Neue Interpretation des Skalarprodukts (II.7.2): Lemma 2 sagt, dass für zwei Darstellungen $(V_1, \rho_1)$ und $(V_2, \rho_2)$ von $G$ und die natürliche Darstellung $\rho$ auf $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cong V_1^* \otimes V_2$ gilt

$$(\chi_{\rho_1} \mid \chi_{\rho_2}) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2).$$

  (Diese neue Interpretation des Skalarprodukts sollte an dieser Stelle besonders betont werden, weil sie auch in späteren Vorträgen wichtig ist)
- Frobeniusreziprozität (II.7.2): Frobeniusreziprozität (Thm. 13 und Bemerkung), erklären, dass dies äquivalent zur universellen Eigenschaft ist und Folgerung (Prop. 21);
- Einschränkung auf Untergruppen und Zusammenhang mit induzierten Abbildungen (II.7.3): Doppelnebenklassen erklären, Verkettung von Induktion und Restriktion (Prop. 22);
- Irreduzibilitätskriterium von Mackey (II.7.4).

**Literatur:** [Ser77, II.7.2-4]

**Vortrag 8: Ganzheit von Charakteren**
N.N. 15.06.2020

In diesem Vortrag soll die fundamentale, wenngleich keineswegs offensichtliche, Tatsache diskutiert werden, dass der Grad irreduzibler Darstellungen einer endlichen Gruppe die Ordnung dieser Gruppe teilt. Um dies zu verstehen, machen wir einen kurzen Ausflug in die Zahlentheorie und führen den Begriff der ganzalgebraischen Zahlen ein. Nachdem wir einige allgemeine Eigenschaften ganzalgebraischer Zahlen diskutiert haben, lässt sich leicht zeigen, dass für einen Charakter $\chi$ einer endlichen Gruppe $G$ die Werte $\chi(s)$ für alle $s \in G$ ganzalgebraische Zahlen sind und daraus schließlich die behauptete Tatsache folgern. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Ganzalgebraische Zahlen (II.6.4, siehe auch [JL01, §10]): Definieren Sie den Begriff der ganzalgebraischen Zahl und diskutieren Sie ihre Eigenschaften (Prop. 14 und Korollare);

- Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$. Erklären Sie, warum $\zeta_n$ ganzalgebraisch über $\mathbb{Z}$ ist und folgern Sie mit Korollar 1, dass der Ring $\mathbb{Z}[\zeta_n] \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$ aus ganzalgebraischen Zahlen besteht;

- Ganzheitseigenschaften von Charakteren (II.6.4-5, siehe auch [JL01, §10]): $\chi(s)$ ist eine algebraische Zahl (Prop 15), die ganzen Elemente im Zentrum (Prop.16) mit Korollaren 1 und 2 und stärkerer Version von Korollar 2 (Prop. 17).

**Literatur:** [Ser77, II.6.4-5]

**Vortrag 9: Anwendung von Darstellungstheorie: Satz von Burnside**
N.N. 22.06.2020

Es soll in diesem Vortrag eine Anwendung von Darstellungstheorie endlicher Gruppen betrachtet werden: Es wird ein Beweis des Satzes von Burnside gezeigt, welcher sagt, dass für Primzahlen $p \neq q$ und ganze Zahlen $a, b \geq 0$ Gruppen der Ordnung $p^a q^b$ auflösbar sind. Es werden an zentraler Stelle Resultate zur Ganzheit von Charakteren genutzt, die zum Teil schon in Vortrag 8 diskutiert wurden. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Wiederholung Gruppentheorie (II.8.3-4): Erinnerung an verschiedene Klassen endlicher Gruppen, $p$-Gruppen sind (super-)auflösbar (Thm.14), Sylowsätze (ohne Beweis), Sylowsätze nutzen, um zu erklären, weshalb für Primzahlen $p \neq q$ Gruppen der Ordnung $pq$ auflösbar sind;

- Burnsides Theorem (Ex. 8.6 in II.8.4 folgen, Beweis wird ähnlich in [Kow11, 4.7.2] oder [JL01, §31] geführt): Erklären Sie den Satz von Burnside, Beweis mithilfe Darstellungstheorie präsentieren und, wenn Zeit ist, erklären, wo der Beweis für die altenierende Gruppe $A_5$ der Ordnung $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ schiefgeht (siehe hierzu [Kow11, 4.7.2], Berechnung der Charaktertafel findet man z.B. in [Moe13, 4.3], muss aber nicht vorgeführt werden).

**Literatur:** [Ser77, II.8.4], [Kow11, 4.7.2]

**Vortrag 10: Satz von Artin**
N.N. 29.06.2020

Nachdem in Vortrag 4 induzierte Darstellungen und dessen Charaktere eingeführt wurden und in Vortrag 7 eine alternative Definition mittels der Gruppenalgebra diskutiert wurde, nutzen wir in den folgenden beiden Vorträgen induzierte Darstellungen, um Struktursätze über lineare Darstellungen zu formulieren. Der Satz von Artin sagt uns, dass jeder Charakter einer Gruppe $G$ eine rationale Linearkombination von Charakteren von zyklischen Untergruppen von $G$ induzierten Darstellungen ist. Hierzu wird zunächst die Grothendieck-Gruppe $R(G)$ in der Kategorie der endlich erzeugten $\mathbb{C}[G]$-Moduln definiert. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- Wiederholung: Wiederholung Klassenfunktion und Zusammenhang mit Charakteren, Erinnerung an die Reziprozitätsformel für induzierte Charaktere (II.7.2, S. 55 unten und Thm. 13), erklären, wie dies einen Morphismus $\bigoplus_{H \in X} F_{\mathbb{C}}(H) \to F_{\mathbb{C}}(G)$ definiert, wobei $F_{\mathbb{C}}(G) = \mathrm{Abb}_G(G, \mathbb{C})$ die komplexwertigen Klassenfunktionen auf $G$ bezeichnen;

- Der Ring $R(G)$ (II.9.1): Definition von $R(G)$, Ringstruktur, $F_{\mathbb{C}}(G) = \mathbb{C} \otimes R(G)$, erklären Sie woher die Abbildungen $R(H) \to R(G)$ und $R(G) \to R(H)$ kommen und welche Eigenschaften diese haben;

- Betonen Sie besonders den Unterschied der beiden ganzzahligen Strukturen $R(G)$ und $\mathrm{Abb}_G(G, \mathbb{Z})$ (Klassenfunktionen mit ganzzahligen Werten) in $F_{\mathbb{C}}(G)$;

- Satz von Artin (II.9.2-4, siehe auch [Kow11, 4.8.2]): Aussage (Thm. 17) und Korollar erklären, Erster Beweis (beide Richtungen) und zweiter Beweis der Hinrichtung inklusive Anwendung;

**Literatur:** [Ser77, II.9.1-4]

**Vortrag 11: Satz von Brauer**
N.N. 06.07.2020

Anschließend an Vortrag 10 soll ein weiterer (stärkerer) Struktursatz formuliert werden. Der Satz von Brauer sagt uns, dass jeder Charakter einer Gruppe $G$ eine ganzzahlige Linearkombination von von Charakteren „elementarer" Untergruppen induzierten Darstellungen ist. Diese Klasse von Untergruppen ist ferner die kleinste Klasse, für die diese Aussage gilt. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- $p$-elementare Untergruppen (II.10.1): Definitionen geben, erklären, wie man $p$-elementare Untergruppen findet;
- Für den Beweis des Satzes von Brauer (II.10.2-5) bitte folgendermaßen vorgehen:
  (a) Nennen Sie die Aussage des Satzes von Brauer (Thm. 19);
  (b) Erklären Sie, wie $V_p$ definiert ist und geben Sie Thm. 18 und die präzisere Formulierung Thm. 18′ an. Zeigen Sie, dass Thm. 19 aus Thm. 18′ folgt;
  (c) Sei $A = \mathbb{Z}[\zeta_g]$. Erklären Sie die Eigenschaften von $A$ aus II.10.2 (siehe hierzu auch Vortrag 8). Beweisen Sie Lemma 6. Wie auch in Vortrag 10 sollte an dieser Stelle der Unterschied zwischen den Ringen $A \otimes R(G)$ und $\mathrm{Abb}_G(G, \mathbb{Z}) \otimes A = \mathrm{Abb}_G(G, A)$ betont werden;
  (d) Beweisen Sie Thm. 18′ unter der Annahme, dass es ein $\psi$ gibt, das die Bedingungen aus Lemma 9 erfüllt;
  (e) Konstruieren Sie dieses $\psi$: Beweisen Sie dazu zunächst Lemma 7, welches sagt, dass mod $p$ nur die $p'$-Komponenten betrachtet werden müssen. Zeigen Sie dann Lemma 8 und folgern Sie schließlich Lemma 9.
- Umkehrung des Satzes von Brauer (II.11.3): Aussage nennen, kein Beweis.

**Literatur:** [Ser77, II.10.1-5, II.11.3]

**Vortrag 12: Rationalitätsfragen und Darstellungen über $\mathbb{R}$**
N.N. 13.07.2020

Im Seminar haben wir Darstellungen immer über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ definiert. Die bisherige Theorie hätte auch funktioniert, wenn man stattdessen einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper von Charakteristik 0 betrachtet hätte. Es soll jetzt untersucht werden, was passiert, wenn man über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper $K$ arbeitet. In diesem Vortrag wird ein Kriterium dafür gegeben, dass eine Darstellung von $G$ über $\overline{K}$ über $K$ realisierbar ist. Dazu betrachten wir den entsprechenden Unterring $R_K(G)$ des in Vortrag 10 untersuchten Rings $R(G)$. Der Satz von Brauer zeigt, dass jede Darstellung über einem zyklotomischen Körper realisierbar ist. Abschließend soll noch beispielhaft der Fall $K = \mathbb{R}$ diskutiert werden werden. Es sollten folgende Themen abgedeckt werden:

- $R_K(G)$ und $\overline{R}_K(G)$ (II.12.1): Definieren Sie die Ringe $R_K(G)$ und $\overline{R}_K(G)$;
- Basis von $R_K(G)$ (II.12.1): Zeigen Sie zunächst, dass jede Darstellung von $G$ über $K$ eine direkte Summe von über $K$ irreduziblen Darstellungen ist. In Vortrag 1 (siehe I.1.4) wurde dies für $K = \mathbb{C}$ gezeigt, die Argumentation lässt sich aber für allgemeines $K$ führen. Damit erzeugen die Charaktere irreduzibler Darstellungen von $G$ über $K$ den Ring $R_K(G)$ als

$\mathbb{Z}$-Modul. Dann zeigt man in Prop. 32, dass diese Charaktere orthogonal sind und damit eine Basis von $R_K(G)$ als $\mathbb{Z}$-Modul bilden. An dieser Stelle muss man betonen, dass wir über einem allgemeinen Körper $K$ nicht mehr mit dem hermitischen Skalarprodukt $(- \mid -)$ arbeiten (und dieses allgemein nicht mit $\langle -, - \rangle$ übereinstimmt). Ferner sollte man sich für die Gleichungskette im Beweis folgendes überlegen: Für eine Darstellung $V$ von $G$ über $K$ und einen algebraischen Abschluss $C$ von $K$ gilt $\dim_K V^G = \dim_C V_C^G$, wobei $V_C := V \otimes_K C$. Betrachten Sie dazu den Projektor

$$p = \left( \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g \cdot - \right) : \quad V \to V^G \subseteq V$$

auf die isotypische Komponente der 1. Dann $\dim_K V^G = \mathrm{rk}(p)$. Betrachten Sie anschließend $p \otimes \mathrm{id}_C \colon V_C \to V_C$ und folgern Sie damit $\dim_K V^G = \mathrm{rk}(p) = \mathrm{rk}(p \otimes \mathrm{id}_C) = \dim_C V_C^G$.

- Kriterium (II.12.1): Erklären Sie, wann eine Darstellung von $G$ über $C$ über $K$ realisierbar ist (Prop. 33). Bei der Rückrichtung ist klar, dass man eine virtuelle Darstellung bekommt. Man nutzt Prop. 32 um zu zeigen, dass es sich um eine Darstellung handelt;

- Anwendung des Satzes von Brauer (II.12.3): Wiederholen Sie den Satz von Brauer (Thm. 19 und 20 in II.10.5, siehe Vortrag 11) und folgern Sie Thm. 24 und dessen Korollar. Zeigen Sie dazu zunächst, dass für eine eindimensionale Darstellung $\varphi$ von $G$ gilt: $\varphi \in R_K(G)$ genau dann wenn $\varphi \in \overline{R}_K(G)$;

- Zusammenhang von $R_K(G)$ und $\overline{R}_K(G)$ (II.12.1): Mit Thm. 24 weiß man, dass es eine endliche Erweiterung $L/K$ gibt wie im Beweis von Lemma 12 behauptet ist. Wiederholen Sie, dass die Spur einer endlichen Körpererweiterung $L/K$ definiert ist als $\mathrm{tr}_{L/K}(a) = \mathrm{tr}(\lambda_a)$, wobei $\lambda_a$ die Rechtsmultiplikation mit $a$ bezeichne (siehe Algebra-Skript). Beweisen Sie schließlich Lemma 12;

- Realisierbarkeit über $\mathbb{R}$ (II.13.2, siehe auch [JL01, §23]): Beweis von Thm. 31 (ggf. vorher Eigenschaften von Bilinearformen wiederholen und im Beweis betonen, dass es wegen des Symmetrisierungstricks immer eine invariante symmetrische Bilinearform geben wird, diese dann aber nicht unbedingt nicht-ausgeartet ist), Beschreibung der Typen irreduzibler Darstellungen von $G$ über $\mathbb{R}$ (ohne Beweis).

**Literatur:** [Ser77, II.2.3, II.3.2]

## Literatur


[FH13] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: a first course*, Springer Science & Business Media, 2013.

[JL01] G. James and M. Liebeck, *Representations and characters of groups*, Cambridge University Press, 2001.

[Kow11] E. Kowalski, *Representation Theory*, lecture notes from Spring 2011, ETH Zürich, URL: http://www.math.ethz.ch/~kowalski/representation-theory.pdf.

[Moe13] M. Möller, *Darstellungstheorie, Vorlesungsskript*, `http://www.uni-frankfurt.de/50679798/darstellungstheorie.pdf`, 2013.

[Ser77] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 42, Springer, 1977.