Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 3.2.2014
Abgabetermin: 10.2.2014

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche und $\omega \in \Omega^1(X) \setminus \{0\}$ und

$$\operatorname{vol}(X, \omega) := \frac{i}{2} \iint_X \omega \wedge \bar{\omega}.$$

Zeige

$$\operatorname{vol}(X, \omega) \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$$

und dass für eine Translationsfläche (mit $\omega = \mathrm{dz}$ bezüglich der Karten eines Translationsatlasses) dies genau der euklidische Flächeninhalt ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $L_{(a,b)}$ die L-Fläche mit Schenkellängen a und b und ω die durch dz definierte Differentialform. Zeige, dass $\mathrm{SL}(L_{(a,b)}, \omega)$ genau dann zwei Elemente der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$$

enthält, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $a, b \in \mathbb{Q}$ oder
2. es gibt ein quadratfreies $d \in \mathbb{N}_{>1}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \mathbb{Q}$ und für $a = x + y\sqrt{d}$ mit $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt $b = (1 - x) + y\sqrt{d}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $L_{(2,2)}$ die L-Fläche mit Schenkellängen 2 und 2 und ω die durch dz definierte Differentialform. Berechne $\mathrm{SL}(L_{(2,2)}, \omega)$ und $\mathrm{hol}(L_{(2,2)}, \omega)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei W die Translationsfläche, die man erhält, indem man in folgender Konstellation von Einheitsquadraten im $\mathbb{R}^2$ via Translationen A mit A' usw. verklebt. Zeige, dass die Veech-Gruppe von W genau $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.