Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 21.10.2013
Abgabetermin: 28.10.2013

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $S^2 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$.
Seien

$$\varphi_N : S^2 \setminus (0,0,1) \to \mathbb{R}^2,$$
$$\varphi_S : S^2 \setminus (0,0,-1) \to \mathbb{R}^2$$

die stereografischen Projektionen bezüglich des Nordpols und der Südpols. Sie sind definiert wie folgt. Sei $(x,y,z) \in S^2 \setminus (0,0,1)$, dann existiert genau eine Gerade D zwischen (x,y,z) und $(0,0,1)$. Sei $(a,b,0) := \{z = 0\} \cap D$, dann ist $\varphi_N(x,y,z) := (a,b)$. Die Abbildung φ_S ist analog definiert.

i) Zeigen Sie, dass, nach Identifikation von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, $(S^2 \setminus (0,0,1), \varphi_N)$ und $(S^2 \setminus (0,0,-1), \overline{\varphi_S})$ einen komplexen Atlas auf S^2 bilden.

   Wir bezeichnen die zugehörige Riemannsche Fläche mit X.

ii) Sei $P(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{P} : X \to X : z \to \begin{cases} \varphi_N^{-1} \circ P \circ \varphi_N(z), & \text{falls } z \in S^2 \setminus (0,0,1) \\ (0,0,1), & \text{falls } z = (0,0,1) \end{cases}$$

   eine holomorphe Abbildung von X nach X definiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Das *hyperbolische Dreieck mit Ecken a, b und c* ist die Untermenge von $\mathbb{H}$ der Punkten zwischen den Kreisen von Durchmesser $[a,b]$, $[a,c]$ und $[b,c]$.
Zeigen Sie, dass alle hyperbolischen Dreiecke mit Ecken in $\mathbb{R}$ isomorph sind.
Hinweis: Man findet eine Beschreibung der Biholomorphismen von $\mathbb{H}$ im Abschnitt 4 des Skriptes über Funktionentheorie und Differentialgleichungen[1].

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Definition 1. Seien (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) die Karten von Beispiel 2.6 des Skripts. Dann heißt $\mathbb{P}^1 \setminus U_1$ der *Punkt im Unendlichen* und wird mit ∞ bezeichnet.

[1] *verfügbar unter* https://titus.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/FtDgl1213/FtDgl-Aufgaben-Skript/FtDgl_Skript.pdf

i) Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom und Γ sein Graph in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass sein Abschluss in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ eine Riemannsche Fläche ist.

   Betrachten Sie die so definierte Fortsetzung $\hat{P} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

ii) Zeigen Sie, dass $\hat{P}$ holomorph ist und bestimmen Sie $\mathrm{ord}_\infty(\hat{P})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien T_a und T_b zwei Tori mit Perioden $a = (a_1, a_2)$ und (b_1, b_2). Seien $M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Sei $j \in \{1, 2\}$ fest und für $i = 1, 2$ gelte $M_j \cdot a^\top = b^\top$. Zeigen Sie, dass dann T_a und T_b zueinander isomorph sind.