Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2013
11. Juli 2013

Modulformen

Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Zeige: Für $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\sharp \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = N^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

wobei das Produkt über alle Primteiler p von N läuft.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für jede Primzahl p und $e \in \mathbb{N}$

$$\sharp \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) = p^{3e} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

gilt. Dabei hilft vielleicht Aufgabe 3(a) vom Übungsblatt 3.

(b) Zeige: $\Gamma_0[N]/\Gamma_1[N] \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ und $\Gamma_1[N]/\Gamma[N] \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Hinweis: Wähle eine Projektion auf eine geeignete Koordinate.

(c) Zeige: Für den Index von $\Gamma_0[N]$ in $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$[\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0[N]] = N \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

wobei p die Primteiler von N durchläuft.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $1 < N \in \mathbb{N}$ und $k \geq 4$ gerade. Zu einem Zeilenvektor $v \in \mathbb{Z}^2$, dessen Bild $\overline{v} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ von Ordnung N ist, definieren wir (für $\tau \in \mathbb{H}$)

$$E_k^{\overline{v}}(\tau) = \varepsilon_N \sum (c\tau + d)^{-k},$$

wobei über teilerfremde $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(c, d) \equiv v \mod N$ summiert wird und $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon_N = 1$ für $N > 2$ ist.

(a) Zeige: $E_k^{\overline{v}} \in M_k(\Gamma[N])$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für alle $\gamma \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gleichheit

$$\left(E_k^{\overline{v}}|_k\gamma\right)(\tau) = E_k^{\overline{v\gamma}}(\tau)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\bar{\cdot}$ die kanonische Projektion mod N.

(b) Sei nun $N = 2$. Zeige: Für $\overline{v} = \overline{(0,1)}$ ist

$$\lim_{\tau \to \infty} E_k^{\overline{v}} = 1$$

und der Grenzwert ist 0 für alle anderen gültigen Wahlen von $\overline{v}$.

(c) Für $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma \cdot \infty = 0$ und f eine Modulform vom Gewicht k zu $\Gamma[2]$ sagen wir, dass f *bei der Spitze* 0 *verschwindet*, falls

$$\lim_{\tau \to \infty} \big(f|_k \gamma\big)(\tau) = 0.$$

Analog sei das Verschwinden bei anderen Spitzen definiert.

Sei nun $\overline{v} = \overline{(1,0)}$ und $\gamma \cdot \infty = 0$.

Zeige: $\lim_{\tau \to \infty} \big(E_k^{\overline{v}}|_k \gamma\big)(\tau) = 1$ und für zulässige $\overline{w} \neq \overline{v}$ verschwindet $E_k^{\overline{w}}$ bei 0.

Was passiert im Fall $\tau \to 1$?

Folgere, dass $E_k^{\overline{(1,0)}}$, $E_k^{\overline{(0,1)}}$ und $E_k^{\overline{(1,1)}}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei f eine Modulform von Gewicht k. Dann definieren wir die Ableitung von f als

$$f' := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}.$$

(a) Zeige, dass f' nicht modular ist: Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$f'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{k+2} f'(z) + \frac{ck}{2\pi \mathrm{i}} (cz+d)^{k+1} f(z).$$

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Eisensteinreihe E_2 auch keine Modulform ist aber ein ähnliches Transformationsverhalten aufweist. Zeige, dass die *Serre-Ableitung*

$$\vartheta_k f := f' - \frac{k}{12} E_2 f$$

eine Modulform vom Gewicht $k+2$ ist.

(c) Wir nennen $\tilde{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) := \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ den Ring der *Quasimodulformen*.

Zeige, dass $\tilde{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ unter dem Ableitungsoperator abgeschlossen ist.

Abgabe bis **14 Uhr** am **Dienstag, den 16. Juli** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Übung direkt dort.