Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2013
27. Juni 2013

Modulformen

Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $g(z) = \dfrac{1}{z} + z$ für $z \in K_{0,\infty}$. Berechne g^+ und g^-.

(b) Sei $g(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ für $0 < |z - \mathrm{i}| < 2$.

Wie sieht die Laurent-Entwicklung von g um i aus?

Welche Polordnung hat g bei i?

Hinweis: Partialbruchzerlegung und geometrische Reihe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $M_k^{\mathbb{Z}} \subset M_k$ die ganzen Modulformen, deren Fourier-Koeffizienten alle ganzzahlig sind, d.h.

$$f(\tau) = \sum_{d \geq 0} a_d q^d \quad \text{mit} \quad a_d \in \mathbb{Z}\ \forall d.$$

Wir nennen $f \in M_k^{\mathbb{Z}}$ *normiert*, falls $a_0 = 1$.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die normierte Diskriminante $\Delta^* = (2\pi)^{-12}\Delta$ in $M_{12}^{\mathbb{Z}}$ liegt und normiert ist.

Zeige: Für jedes $k \geq 12$ und für jedes normierte $g \in M_k^{\mathbb{Z}}$ gilt

$$M_k^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cdot g \oplus M_{k-12}^{\mathbb{Z}} \cdot \Delta^*, \quad \text{wobei} \quad M_0^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad M_2^{\mathbb{Z}} = \{0\} \quad \text{sind.}$$

Zeige außerdem: $M_k^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = M_k$.

Insbesondere gilt für alle k: $\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} M_k^{\mathbb{Z}} = \dim_{\mathbb{C}} M_k$.

Hinweis: Proposition 2.26.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir lassen $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch Möbiustransformationen auf $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ operieren.

(a) Bestimme $\Gamma \cdot \infty$, die Bahn von ∞, so wie Γ_∞, den Stabilisator von ∞.

(b) Wir bezeichnen mit E_k die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht k.

Zeige: Für $k \geq 4$ gerade gilt

$$E_k = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k = 1 + \mathrm{i}^k \frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(d) q^d.$$

(c) Zeige weiter: Für $k \geq 4$ gerade ist

$$E_k(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k \gamma(\tau)$$

wobei die Summe über die Rechtsnebenklassen von Γ_∞ in Γ läuft.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Vom letzten Übungsblatt kennen wir die Gruppen $\Gamma[n] = \mathrm{Kern}(\Gamma \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \lhd \Gamma$.

(a) Gib ein Vertretersystem der Bahnen der Operation von $\Gamma[2]$ auf $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ an.

(b) Sei $f\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f|_k\gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma[n]$ für festes $n > 1$.

Gib eine Fourierentwicklung von f an.

Hinweis: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \notin \Gamma[n]$ aber $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma[n]$.

(c) Sei f wie eben. Wir nennen f eine *Modulform von Gewicht k zur Kongruenzgruppe* $\Gamma[n]$ falls zusätzlich $f|_k\gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ auf $\{\mathrm{Im}\,\tau > C\}$ für ein $C > 0$ beschränkt ist.

Zeige: $E_k^\infty[2] = \sum_{\gamma \in \Gamma[2]_\infty \backslash \Gamma[2]} 1|_k\gamma$ ist eine Modulform von Gewicht k für $\Gamma[2]$.

Abgabe bis **14 Uhr** am **Dienstag, den 2. Juli** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Übung direkt dort.