Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2013
12. Juni 2013

Modulformen

Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen $2{\times}2$-Matrizen mit Determinante 1. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass G durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ operiert.

(a) Zeige: Der Stabilisator von $\mathrm{i} \in \mathbb{H}$ unter dieser Operation ist

$$K = \mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R},\, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

(b) Zeige: Jede Matrix $g \in G$ besitzt eine *Iwasawa-Zerlegung*, d.h. für jedes $g \in G$ existieren $a \in A$, $n \in N$ und $k \in K$ mit $g = ank$. Dabei ist

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R},\, a > 0 \right\} \quad \text{und} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Insbesondere gilt also $G = ANK$.

(c) Gib eine Bijektion zwischen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ und den oberen Dreiecksmatrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ an.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Wir betrachten nun die eingeschränkte Operation von $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$. Sei

$$\overline{F} = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1 \text{ und } |\operatorname{Re}\tau| \leq \tfrac{1}{2}\}$$

der Abschluss des aus der Vorlesung bekannten Fundamentalbereichs. Sei zudem $\rho = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/6}$.

(a) Zeige: Für alle $\tau \in \overline{F} \setminus \{\mathrm{i}, \rho, \rho^2\}$ gilt für den Stabilisator: $\Gamma_\tau = \{\pm 1\}$.

Zeige außerdem: In den übrigen drei Fällen ist der Stabilisator zyklisch und endlich. Gib die Ordnungen und jeweils einen Erzeuger (in Abhängigkeit von S und T) an.

Hinweis: Zeige zunächst: $\operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$. Was bedeutet das für $|c|$?

(b) Seien nun $\Lambda_\mathrm{i} = \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z}$ und $\Lambda_\rho = \mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$ die zu i und ρ gehörigen Gitter.

Zeige: $g_3(\mathrm{i}) = 0$ und $g_2(\rho) = 0$.

Hinweis: Zeige zunächst: $\mathrm{i}\Lambda_\mathrm{i} = \Lambda_\mathrm{i}$ und $\rho\Lambda_\rho = \Lambda_\rho$.

(c) Folgere, dass $j(\mathrm{i}) = 1728$ und $j(\rho) = 0$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi_n \colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ die kanonische Projektion. Wir nennen $\Gamma[n] = \mathrm{Kern}\, \pi_n$ die *Hauptkongruenzgruppe* (mod n).

(a) Zeige: π_n ist surjektiv und somit ist $\Gamma[n]$ stets ein Normalteiler von endlichem Index.

Hinweis: Zeige zunächst: Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{ggT}(a + xb, c) = 1$.

(b) Zeige: Für $n \geq 2$ operiert $\Gamma[n]$ fixpunktfrei auf $\mathbb{H}$, d.h. für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ist $\Gamma[n]_\tau = \{\pm 1\}$ für $n = 2$ und sogar trivial für $n > 2$.

Hinweis: Aufgabe 2(a).

(c) Gib ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\Gamma[2]$ in Γ an.

Hinweis: Wie viele Elemente hat $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

Abgabe bis **14 Uhr** am **Dienstag, den 18. Juni** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Übung direkt dort.