Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2013
21. Mai 2013

Modulformen

Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $g\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar.

(a) Zeige: g besitzt eine *Fourier-Entwicklung*, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x},$$

mit $c_k(g) = \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$, wobei diese Reihen gleichmäßig konvergieren.

Hinweis: Partielle Integration! Außerdem: Zeige, dass ohne Einschränkung $x = 0$ und $g(0) = 0$ angenommen werden können.

(b) Zeige, dass die Fourier-Koeffizienten eindeutig sind.

Genauer: Für $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ für die

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}$$

lokal gleichmäßig konvergiert gilt bereits $a_n = c_n(g)$ für alle n.

Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz erlaubt das Vertauschen von Integration und Summation.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige das Additionstheorem für die $\wp$-Funktion: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z, w, z \pm w \notin \Lambda$ gilt

$$\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2,$$

wobei Λ das zu $\wp$ gehörige Gitter ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für $w \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\Lambda$

$$f(z; w) = \frac{1}{2}\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}$$

eine elliptische Funktion mit einfachen Polen in den Punkten $z \in \Lambda$ und $z \in -w + \Lambda$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \oplus \lambda_2\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit $\lambda_1 > 0$ und $\frac{1}{\mathrm{i}}\lambda_2 > 0$.

(a) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Zeige: $\wp(z)$ ist genau dann reell, wenn es ein $\lambda \in \Lambda$ mit

$$z \in \frac{\lambda}{2} + \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad z \in \frac{\lambda}{2} + \mathrm{i}\mathbb{R} \quad \text{gibt.}$$

Hinweis: Zeige, dass $\wp(z) = \wp(\lambda_1 + \overline{z}) = \wp(\lambda_1 + \lambda_2 - z) = \wp(\lambda_2 - \overline{z})$, falls $\wp(z) \in \mathbb{R}$.

(b) Zeige: Die $\wp$-Funktion bildet das Rechteck

$$R = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\lambda_1}{2},\ 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} \frac{\lambda_2}{2} \right\}$$

biholomorph auf die untere Halbebene $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ ab.

Hinweis: $\wp(R)$ ist zusammenhängend und $\wp(2R) = \mathbb{C}$!

(c) Gib eine biholomorphe Abbildung an, die das Einheitsquadrat

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z < 1\}$$

auf die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ abbildet.

Abgabe bis **14 Uhr** am **Dienstag, den 28. Mai** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Übung direkt dort.