Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2013
30. April 2013

Modulformen

Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

In der Vorlesung wurden Gitter als Mengen der Form

$$\Lambda = b_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus b_n\mathbb{Z} \subset V$$

eingeführt, wobei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist. Ziel ist es, eine alternative Charakterisierung zu finden.

Zeige dazu für $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Λ ist ein Gitter.
2. Λ ist eine diskrete Untergruppe des $\mathbb{R}^n$, die in keiner Hyperebene enthalten ist.

Hinweis: Versuche das Argument aus der Vorlesung per Induktion auf n Dimensionen zu übertragen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Erinnere dich an den Kotangens:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}.$$

Zeige: Er besitzt (für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$) eine Partialbruchzerlegung

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

Hinweis: Betrachte für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Funktion

$$f(w) = \frac{z}{w(z-w)}\pi\cot(\pi w).$$

Zeige, dass f als Singularitäten nur Pole 1. und 2. Ordnung besitzt und außerhalb von $\{z\} \cup \mathbb{Z}$ holomorph ist. Betrachte dann für ein geeignetes Quadrat $Q \subset \mathbb{C}$ (dessen Rand keine Singularitäten von f enthält!) das Wegintegral von f und zeige

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial Q} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\pi\cot(\pi z) + \frac{1}{z} + \sum_{0<|n|\leq N}\frac{z}{n(z-n)}$$

für geeignetes $N \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

1. Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte *rationale* Zahlen B_k, so dass für $|z| < 2\pi$

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{\mathrm{e}^z + 1}{\mathrm{e}^z - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

gilt. Die B_k heißen *Bernoulli-Zahlen.*

Hinweis: Potenzreihenentwicklung und Cauchy-Produkt!

2. Zeige: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}.$$

Dabei ist $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, die Riemannsche Zetafunktion.

Hinweis: Zeige mit Hilfe von Aufgabe 2:

$$z \cot z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{2^{2k} z^{2k}}{(2k)!} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Aus der Vorlesung kennen wir die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zu einem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$

$$\wp(z) = \wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} z^{2n-2}.$$

Dabei sind $G_k = G_k(\Lambda) = \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda} \lambda^{-k}$ die aus der Vorlesung bekannten Eisensteinreihen.

Zeige: $\wp$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\big(\wp'(z)\big)^2 = 4\wp^3(z) - 60 G_4 \wp(z) - 140 G_6.$$

Hinweis: Zeige, dass die Differenz beider Seiten holomorph und periodisch ist.

Abgabe bis **14 Uhr** am **Dienstag, den 7. Mai** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Übung direkt dort.