

Übungsblatt $\frac{1}{2}$

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktion

$$F(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

für $|z| < 1$ die Bogenlänge der Lemniskate beschreibt. Zeige den *Additionssatz von Fagnano* für F , d.h. in einer kleinen Umgebung von 0 gilt

$$2F(z) = F\left(2z \frac{\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}\right).$$

Hinweis: Was bewirkt die Substitution

$$t^2 = \frac{2s^2}{1+s^4}$$

in der Integralfunktion F ?

Zeige anschließend: F ist lokal um 0 invertierbar und für die Umkehrfunktion G gilt

$$G(2u) = \frac{2G(u)G'(u)}{1+G(u)^4}$$

in einer kleinen Umgebung von 0.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

- a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nicht konstant 0 ist. Zeige: Die Menge der Nullstellen von f besitzt keinen Häufungspunkt.

Hinweis: Potenzreihenentwicklung!

- b) Zeige den *Identitätssatz*: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist genau dann $f = g$, wenn $\{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt besitzt.