Wintersemester 2010/2011 30.11.2011

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 7

Aufgabe 1 In einem 3-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ seien zwei Basen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ gegeben. Es gelte

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 - b_3 \\ c_2 &= 2b_1 - b_2 - b_3 \\ c_3 &= b_2 + b_3 \end{aligned}$$

a) Bestimme die Basiswechselmatrix Θ_{BC}.

b) Welchen Koordinatenvektor bezüglich B hat $v = 3c_1 + c_2 - c_3$?

Aufgabe 2 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = x + y + z.$$

Zeige, dass f linear ist und bestimme eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$.

Aufgabe 3 Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Bestimme die Basiswechselmatrix Θ_{BC}.

Aufgabe 4 Es sei K ein Körper. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $\Phi : K^{n\times n} \to K^{n\times n}, \quad A \mapsto A^T$

b) $\Psi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A \mapsto A^2$

c) $D : K[X] \to K[X], \quad f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \longmapsto f' = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$

Aufgabe 5 Die komplexe Konjugation ist die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy$$

(wobei $x, y \in \mathbb{R}$). Zeige:

a) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: $\sigma(z_1 + z_2) = \sigma(z_1) + \sigma(z_2)$.

b) Wenn wir $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ als 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen, dann ist σ eine lineare Abbildung bezüglich der Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(\lambda, z) \mapsto \lambda z$.

c) Wenn wir $\mathbb{C}$ als eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum auffassen, dann ist σ nicht linear bezüglich der Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(\lambda, z) \mapsto \lambda z$.