Wintersemester 2010/2011 23.11.2011

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 6

Es sei K immer ein Körper.

Aufgabe 1 Es sei V ein K-Vektorraum. Weiter seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeige:

a) Für alle $\lambda \in K$ gilt: $[v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n] = [v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n]$.

b) Für alle $\lambda \in K \setminus \{0\}$ gilt: $[v_1, \dots, v_i, \dots, v_n] = [v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n]$.

c) $[v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n] = [v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n]$.

Aufgabe 2 Es sei

$$U = [(1,0,1), (2,-1,1), (0,1,1)] \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Bestimme eine Basis von U.

Aufgabe 3 Wir können Vektoren auch als Spalten schreiben, wenn wir K^n als $K^{n\times 1}$ auffassen. Wie bestimmt man eine Basis von

$$\tilde{U} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}?$$

Aufgabe 4 Ergänze die Basis von U aus Aufgabe 2 zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$. Gibt es mehrere Möglichkeiten, dies zu tun?

Aufgabe 5 Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Weiter seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Wenn $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig ist, dann lässt sich jedes v_i als Linearkombination der übrigen Vektoren aus $\{v_1, \dots, v_n\}$ darstellen.

(ii) Wenn es ein $x \in V$ gibt, so dass sich x eindeutig als Summe der v_i schreiben lässt, dann ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig.

(iii) Wenn $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig ist, so ist für beliebiges $x \in V$ auch $\{v_1 + x, \dots, v_n + x\}$ linear unabhängig.