Wintersemester 2010/2011 09.11.2011

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 4

Aufgabe 1 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 7}.$$

Bestimme die Menge der Lösungen des homogenen LGS $Ax = 0$ (mit $x \in \mathbb{R}^7$).

Aufgabe 2 *(Gauß-Algorithmus I)* Bestimme mithilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen des folgenden LGS über $\mathbb{R}$ (in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

.

Aufgabe 3 *(Gauß-Algorithmus II)* Schreibe wenn möglich die folgenden Matrizen als Produkt von Elementarmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom von Grad kleiner gleich 2 mit $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ und $f(-1) = 3$. Bestimme f indem Du ein LGS für die Koeffizienten von f aufstellst.

Gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ von Grad kleiner gleich 2 mit $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(-1) = 3$ und $f(0) = 42$?

Aufgabe 5 Gesucht ist die Lösungsmenge des folgenden LGS über $\mathbb{F}_2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Bestimme alle Lösungen des LGS mithilfe des Gauß-Algorithmus. Wie viele Lösungen gibt es?

Aufgabe 6 *(optional)* Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zu $\lambda \in \mathbb{K}$ und $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ wurde in der Vorlesung die Elementarmatrix

$$E_{ij}(\lambda) = E_n + e_{ij}(\lambda) \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

definiert. (Hierbei ist $e_{ij}(\lambda)$ die Matrix, deren (i, j)-ter Eintrag λ ist und deren übrige Einträge 0 sind.)

Zeige: Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt $E_{ij}(\lambda)^m = E_{ij}(m \cdot \lambda)$.

Aufgabe 7 *(optional)* Es sei $\phi : (G, *) \to (H, \circ)$ ein Gruppenhomomorphismus und $h \in \phi(G)$ ein Element aus dem Bild.

Zeige: Dann ist die Menge aller $g \in G$, die Lösungen von $\phi(g) = h$ sind, gegeben durch

$$\mathrm{Kern}(\phi) * g_0 = \left\{ g * g_0 \mid g \in \mathrm{Kern}(\phi) \right\}$$

für ein $g_0 \in G$.