Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2011/12
Frankfurt/M., 7. Dezember 2011
Abgabetermin: 15.12.2011

Lineare Algebra

Übungsblatt 8[1]

Aufgabe 1

Es sei $B_1 := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und es sei $B_2 := \{(1,2,0),(0,1,2),(2,0,-7)\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$. Weiter sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ , } (x,y,z) \mapsto (-7x+4y-2z, y, 28x-14y+8z)$$

die lineare Abbildung aus Aufgabe 1, Blatt 7.
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $A_{B_1B_1}$, $A_{B_2B_1}$, $A_{B_1B_2}$ und $A_{B_2B_2}$ von f bezüglich dieser Basen sowie den Rang von f.

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Finden Sie invertierbare Matrizen $S, T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass SAT die Form $I_r \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $1 \leq r \leq 3$ hat (I_r wie in Beweis von Satz 7.9).

Aufgabe 3

Es seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$V = \mathrm{Bild}(f) \oplus \mathrm{Kern}(f).$$

1. Zeigen Sie, dass es eine Basis B von V gibt, sodass für die Abbildungsmatrix A_{BB} von f bezüglich dieser Basis gilt:

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   wobei A eine $(k \times k)$-Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = k$ und 0 jeweils die passende Nullmatrix ist.

2. Es gelte $f \circ f = f$ und A_{BB} habe bezüglich einer Basis B obige Gestalt: Zeigen Sie, dass dann A die $(k \times k)$-Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie: Bei der folgenden auf der Menge M definierten Relation $\sim$ handelt es sich um eine Äquivalenzrelation:

1. $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$, $x \sim y :\Leftrightarrow x \cap y \neq \emptyset$.

2. M sei eine Gruppe, $U \leq M$ eine Untergruppe, $x \sim y :\Leftrightarrow xy^{-1} \in U$

[1] *auch im Internet unter*
http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/LAWS1112/index.html
und im e-Learning System OLAT