Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2011/12
Frankfurt/M., 16. November 2011
Abgabetermin: 24.11.2011

Lineare Algebra

Übungsblatt 5[1]

Aufgabe 1

a) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $V := \{f : \mathbb{N} \to K\}$ mit den durch

$$(f+g)(n) := f(n) + g(n) \text{ und } (\lambda \cdot f)(n) := \lambda f(n)$$

für alle $f, g \in V, \lambda \in K, n \in \mathbb{N}$ definierten Verknüpfungen ein K-Vektorraum ist.
b) Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei weiter $e_i \in V$ definiert durch $e_i(j) := \delta_{ij}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Finden Sie ein $f \in V$, dass in $V \setminus [\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}]$ liegt.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, $K[X]$ der K-Vektorraum der Polynome über K und $\alpha \in K$.
a) Zeigen Sie, dass $U_\alpha := \{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ und $C := \{P \in K[X] \mid \deg(P) \leq 0\}$ Untervektorräume von $K[X]$ sind.
b) Zeigen Sie, dass $K[X] = U_\alpha \oplus C$ ist.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller reellen Folgen, wobei für alle $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{R}$ die Verknüpfungen definiert sind durch:

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ und } \lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

a) Zeigen Sie, dass $F := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : \left(\begin{smallmatrix} a_{i+1} \\ a_{i+2} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{smallmatrix}\right)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.
b) Finden Sie zwei Elemente $v_1, v_2 \in F$ mit $F = [v_1, v_2]$.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper. Beweisen oder widerlegen Sie:
a) Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt

$$(U_1 \cap U_2) + U_3 \subseteq (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3).$$

b) Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt

$$(U_1 \cap U_2) + U_3 \supseteq (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3).$$

c) Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3).$$

d) Für jeden K-Vektorraum V und alle Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ gilt

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 \supseteq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3).$$

[1] *auch im Internet unter*
http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/LAWS1112/index.html
und im e-Learning System OLAT