Prof. Dr. M. Möller
Q. Gendron, D. Ufer, C. Weiß

WS 2012/2013
Frankfurt/M., 18.01.2013
Abgabetermin: 01.02.2013

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

Vorbemerkung zu A1

Man nennt eine Funktion $v(x)$ (bzw. $w(x)$) eine *Unterfunktion* (bzw. *Oberfunktion*) bezüglich des AWPs

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \text{ im Intervall } J := [x_0, x_0 + a], \tag{1}$$

wenn sie in J differenzierbar ist und wenn $v(x_0) \leq y_0$ und $v' < f(x,v)$ in J (bzw. $w(x_0) \geq y_0$ und $w' > f(x,y)$ in J) gilt.
Es folgt unmittelbar, dass für alle $x \in (x_0, x_0 + a]$ und jede Lösung $y(x)$ von (1) die Gleichung $v(x) < y(x) < w(x)$ gilt.

Aufgabe 1

Betrachten Sie das AWP

$$y' = x + \sqrt{1+y^2}, \quad y(0) = 1. \tag{2}$$

Leiten Sie eine Unterfunktion $u(x)$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ her und zeigen Sie, dass es eine Oberfunktion $w(x)$ mit $w(x) \in \mathcal{O}(\exp(2x))$ gibt.

Aufgabe 2

Geben Sie für das AWP

$$\frac{2y}{1+2y^2} y' = \frac{1}{x+3x^3}, \quad y(1) = 2. \tag{3}$$

eine Lösung und deren maximalen Definitionsbereich an. Begründen Sie!

Aufgabe 3

Entwickeln Sie die holomorphe Funktion $f(x,y) = \frac{x}{x+y+1}$ um $(0,0)$ in eine Potenzreihe.

Aufgabe 4

Seien die Funktionen

$$f(x,y) = y^2 - x^2, \qquad g(x,y) = 2xy$$

gegeben. In dieser Aufgabe wollen wir eine Lösung des impliziten AWPs

$$f(x,y) + g(x,y) \cdot y' = 0, \quad y(1) = -1. \tag{4}$$

bestimmen.

(a) Bestimmen Sie eine Funktion $F(x,y)$, so dass für die partiellen Ableitungen von F die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = f(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = g(x,y) \tag{5}$$

erfüllt sind.

(b) Zeigen Sie, dass falls $y(x)$ die DGL aus (4) erfüllt, dann ist $F(x,y(x))$ konstant.

(c) Benutzen Sie (b) um eine Lösung des AWPs (4) zu bestimmen.