Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
15. Dezember 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $G \leq \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ eine abgeschlossene lineare Untergruppe und sei

$$\mathfrak{g} \coloneqq \{v \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R}) : \exp(tv) \in G \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeige: Es gibt eine Umgebung $0 \in B \subset \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$, so dass für alle $v \in B$ und jede Folge mit $v_m \longrightarrow v$ für $m \to \infty$ gilt:

$$\left(I + \frac{1}{m} v_m\right)^m \longrightarrow \exp(v) \text{ für } m \to \infty.$$

(b) Zeige: $\mathfrak{g}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$.

Hinweis: Vorsicht! $\exp(v + w) = \exp(v)\exp(w)$ gilt i.a. nur falls $vw = wv$.

(c) Zeige: $\mathfrak{g}$ ist abgeschlossen unter der *Lie-Klammer*:

$$[u, v] \coloneqq uv - vu, \quad u, v \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir definieren zu der Heisenberggruppe

$$H \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \geq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} =: G$$

eine abgeschlossene lineare Untergruppe G.

(a) Berechne die Lie-Algebren $\mathfrak{h}$ zu H und $\mathfrak{g}$ zu G.

(b) Zeige: Es gibt ein inneres Produkt auf $\mathfrak{h}$, das durch seine Einschränkung auf $\mathfrak{g}$ linksinvariante Metriken d_H auf H und d_G auf G liefert, für die $\mathrm{d}_G|_H \neq \mathrm{d}_H$ gilt.

Hinweis: Für $z > 0$ und $x = y = \sqrt{z}$ gilt

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -y \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Finde ein inneres Produkt auf $\mathfrak{h}$, so dass $\mathrm{d}_G(h, I) \neq \mathrm{d}_H(h, I)$ für genügend großes z gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige: $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ bezüglich der Abbildung

$$\phi\colon\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})),\ \phi(g)(m) = gmg^{-1},\ g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}),\ m \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 12. Januar** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.