Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
8. Dezember 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert stetig auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$M\colon \ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \ni \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x \right) \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Zeige, dass $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ keine M-invarianten Maße besitzt.

Hinweis: Erinnere dich daran, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von den Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei G diskret und $N \lhd G$ eine normale (abgeschlossene) Untergruppe. Sei μ das Haarmaß auf G. Dann versehen wir N mit $\mu|_N$ und G/N mit dem Bildmaß bezüglich der Projektion.

Zeige: Sind N und G/N amenabel, so ist auch G amenabel.

Hinweis: Kompakte diskrete Mengen sind endlich.

(b) Wir nennen G *auflösbar*, falls es

$$\{1\} \lhd N_1 \lhd N_2 \lhd \cdots \lhd N_k \lhd G$$

gibt, so dass N_i/N_{i+1} für alle i abelsch ist.

Zeige: Ist G auflösbar, so ist G amenabel.

Hinweis: Verwende (ohne Beweis), dass Teil (a) auch allgemeiner für lokalkompakte Gruppen gilt und dass abelsche Gruppen amenabel sind.

(c) Zeige: Die Heisenberggruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ist auflösbar, also amenabel.

Hinweis: Wie sieht die Kommutatoruntergruppe von H aus?

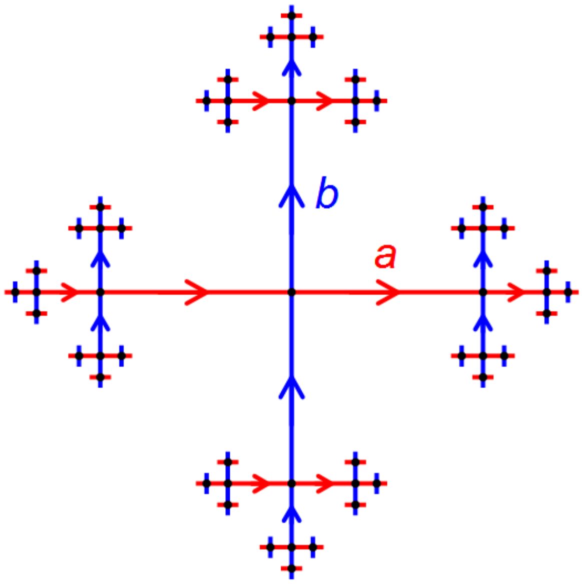
Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Für $M \subset V$ definieren wir den *Rand von* M, $\partial M \subset M$ als die Knoten in M, die einen Nachbarn in $V \setminus M$ haben. Für nichtlehres endliches $M \subset V$ setzen wir $c(M) := \frac{|\partial M|}{|M|}$. Damit definieren wir die *Cheeger-Konstante von* G, als

$$\mathfrak{c}(G) := \inf_{M \subset V \text{ endlich}} c(M).$$

Wir nennen G *amenabel* falls $\mathfrak{c}(G) = 0$.

Nun sei G der *Cayley-Graph* zu $F_2 = \langle a, b \rangle$, der freien Gruppe in zwei Erzeugern. Das heißt: Für die Knotenmenge gilt $V = F_2$ und zwischen zwei Knoten $g, s \in F_2 = V$ gibt es genau dann eine Kante, wenn ein $h \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ existiert, das $s = gh$ erfüllt. Also besteht die Kantenmenge E aus Elementen der Form (g, gh) mit $g \in F_2, h \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$.



Zeige, dass die Cheeger-Konstante des Cayley-Graphen der freien Gruppe in zwei Erzeugern $\frac{2}{3}$ ist, also dass G hier nicht amenabel ist.

Hinweis: Es genügt eine untere Schranke für $c(M)$ einer endlichen Knotenmenge M zu finden. Zeige zunächst, dass man sich auf zusammenhängende M beschränken kann, da für Zusammenhangskomponenten M_i von M

$$\min_{i : M_i \neq \emptyset} c(M_i) \leq c(M) \leq \max_{i : M_i \neq \emptyset} c(M_i)$$

gilt.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 15. Dezember** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.