Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
1. Dezember 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X ein σ-kompakter metrischer Raum. Zeige, dass X separabel ist, d.h. X besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge.

Hinweis: Zeige zuerst: Für jedes $\varepsilon > 0$ lässt sich ein beliebiger kompakter metrischer Raum durch endlich viele ε-Kugeln überdecken.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zu $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ definieren wir folgende Untergruppen:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und}$$
$$K := \mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

(a) Zeige die *Iwasawa-Zerlegung*: Die Abbildung

$$\Psi\colon A \times N \times K \longrightarrow G, \quad (a, n, k) \mapsto ank$$

ist ein Homöomorphismus.

(b) Zeige: Ist $\phi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}_+^\times$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, so ist ϕ trivial.

Insbesondere ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ somit unimodular.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Seien $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ und $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S)$ ergodische $\mathbb{Z}$-Aktionen, d.h.

$$T\colon \mathbb{Z} \times X \longrightarrow X,\ (n, x) \mapsto T^n(x) \quad \text{und} \quad S\colon \mathbb{Z} \times Y \longrightarrow Y,\ (m, y) \mapsto S^m(y)$$

sind ergodisch, so induziert dies durch $(m, n) \mapsto T^m \times S^n$ eine $\mathbb{Z}^2$-Aktion auf dem Produkt $(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Zeige: Diese Produktaktion ist ergodisch aber es gibt Untergruppen von $\mathbb{Z}^2$, die nicht ergodisch operieren.

(b) Finde ein Beispiel für eine ergodische $\mathbb{Z}$-Aktion T, so dass T^n für kein $n \in \mathbb{Z}$ ergodisch ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe.

Zu G definieren wir die *duale Gruppe* durch

$$\hat{G} := \{\chi\colon G \longrightarrow S^1 \mid \chi \text{ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus}\},$$

wobei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit der Teilraumtopologie versehen ist.

Zeige:

(a) Indem wir $\hat{G}$ mit der *kompakt-offenen Topologie* versehen, d.h. hier, dass

$$\chi_n \to \chi \iff \text{für jedes kompakte } K \subseteq G \text{ konvergiert } \chi_n|_K \to \chi|_K \text{ gleichmäßig,}$$

wird $\hat{G}$ zu einer topologischen Gruppe.

(b) $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$ als topologische Gruppen.

(c) $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$ als topologische Gruppen.

(d) $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als topologische Gruppen, für beliebiges n.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 8. Dezember** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.