Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
24. November 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $g\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar.

(a) Zeige: g besitzt eine *Fourier-Entwicklung*, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx},$$

mit $c_k(g) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$, wobei diese Reihen gleichmäßig konvergieren.

Hinweis: Partielle Integration! Außerdem: Zeige, dass ohne Einschränkung $x = 0$ und $g(0) = 0$ angenommen werden können.

(b) Zeige, dass die Fourier-Koeffizienten eindeutig sind.

Genauer: Für $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ für die

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}$$

lokal gleichmäßig konvergiert gilt bereits $a_n = c_n(g)$ für alle n.

Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz erlaubt das Vertauschen von Integration und Summation.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $T_2\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x \mod \mathbb{Z}$ die Kreisverdopplungsabbildung und μ das Lebesguemaß.

(a) Finde einen Punkt der generisch bezüglich μ liegt.

(b) Finde einen Punkt der generisch bezüglich eines weiteren T_2-invarianten ergodischen Maßes liegt.

(c) Finde einen Punkt der bezüglich keines T_2-invarianten Maßes generisch liegt.

Hinweis: Finde ein x und ein stetiges f, so dass $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T_2^n x)$ nicht konvergiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige: Die ergodischen Maße zu T_2 liegen schwach-$*$-dicht im Raum aller T_2-invarianten Maße auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Zeige: Die Folge $(\alpha \cdot n \mod \mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist gleichverteilt.

(b) Zeige: Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichverteilt, so ist auch $(m \cdot x_n \mod \mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ für beliebiges $m \in \mathbb{Z}$ gleichverteilt.

(c) Zeige: Die Folge $(\log n \mod \mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht gleichverteilt.

Hinweis: Hier gilt Eulers Summenformel. Für $N \in \mathbb{N}$ und eine komplexe Funktion F, deren Ableitung auf $[1,N]$ stetig ist, gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} F(n) = \int_1^N F(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\big(F(1) + F(N)\big) + \int_1^N \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) F'(t)\mathrm{d}t.$$

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 1. Dezember** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.