Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
17. November 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ versehen, also insbesondere kompakt. Sei $\theta\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Bijektion.

Zeige: Die Abbildung $T\colon X \longrightarrow X$, $T(x) = \theta^{-1}(\theta(x)+1)$ ist Borel-messbar, lässt aber keine invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße zu.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeige den Weierstraßschen Approximationssatz: Für alle $f \in \mathcal{C}([a,b])$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom P, so dass

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon.$$

Gehe dazu in folgenden Schritten vor:

a) Zeige: Ohne Einschränkung ist $[a,b] = [0,1]$ und $f(0) = f(1) = 0$.

b) Setze $q_k(x) := c_k(1-x^2)^k$ für $x \in [-1,1]$ und $k \in \mathbb{N}$ mit c_k so, dass

$$\int_{-1}^{1} q_k(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Zeige: $c_k \leq \sqrt{k}$.

Hinweis: Bernoulli-Ungleichung.

c) Setze $P_k(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+t)q_k(t)\mathrm{d}t$, wobei $f(x) = 0$ für $x \notin [0,1]$.

Zeige: Die P_k sind Polynome und es gibt ein k, so dass $P = P_k$.

Hinweis: Wie sieht der Funktionsgraph von q_k aus?

(b) Zeige: Der Vektorraum der Funktionen $\mathrm{e}_n(x) := \exp(2\pi \mathrm{i} n x)$ liegt dicht in $\mathcal{C}([0,1])$.

Hinweis: Erinnere dich an die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1]), \quad f \mapsto \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^1 f(t)\exp(2\pi\mathrm{i}tx)\mathrm{d}t,$$

die hier surjektiv ist und erinnere dich daran, dass hier $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Welche zulässigen Paare (π_0, π_1) von Permutation auf $\{A, B, C\}$ gibt es?

(b) Zeige (ohne Verwendung des Satzes aus der Vorlesung):

Eine Intervallaustauschtransformation für $\mathcal{A} = \{A, B\}$ besitzt genau dann Keanes Eigenschaft, wenn λ_A und λ_B $\mathbb{Q}$-linear unabhängig sind.

(c) Sei nun $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ und $T(y) = y + \lambda_C \mod \lambda^*\mathbb{Z}$, sowie

$$\pi_0\colon A \mapsto 1,\ B \mapsto 2,\ C \mapsto 3,$$
$$\pi_1\colon A \mapsto 3,\ B \mapsto 2,\ C \mapsto 1.$$

Zeige: T besitzt genau dann Keanes Eigenschaft, wenn $\frac{\lambda_c}{\lambda^*} \notin \mathbb{Q}$ und es keine $m, n \in \mathbb{Z}$ gibt, die $\lambda_A = m\lambda_C + n\lambda^*$ erfüllen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige: Eine Intervallaustauschtransformation, die Keanes Eigenschaft erfüllt, besitzt keine periodischen Bahnen.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 24. November** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.