Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
10. November 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ein maßerhaltendes System. Wir nennen $\mathfrak{X}$ *trivial*, falls $\mu(A) \in \{0, 1\}$ $\forall A \in \mathcal{B}$.

(a) Zeige: $\mathfrak{X}$ ist trivial, falls es für alle $A, B \in \mathcal{B}$ ein N gibt, so dass

$$\mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$$

für alle $n \geq N$ gilt.

(b) Zeige: $\mathfrak{X}$ ist trivial, falls für alle $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subseteq B$,

$$\mu(A \cap T^{-n}B) \longrightarrow \mu(A)\mu(B)$$

gleichmäßig konvergiert ($n \to \infty$).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Bernoulli-Shift $\mathfrak{B}_n = (X, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ durch

$$X = \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{Z}},$$

versehen mit der diskreten Produkttopologie und der Borelsigmaalgebra $\mathcal{B}$ und darauf μ das von einem (endlichen) Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ induzierte Maß und dem Linksshift σ.

Zeige: Für beliebiges n ist $\mathfrak{B}_n$ mischend von Ordnung k für alle $k \geq 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (X, μ) definieren wir zu $f, g \in L^2(X, \mu)$ die *Kovarianz* durch

$$\operatorname{Cov}(f, g) := \int_X fg\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\mu \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Zeige: Das maßerhaltende System $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ist genau dann stark mischend, wenn für alle $f, g \in L^2(X, \mu)$

$$\operatorname{Cov}(f, g \circ T^n) \longrightarrow 0, \text{ für } n \to \infty.$$

Hinweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Zeige: Das maßerhaltende System $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ist genau dann schwach mischend, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, g\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle| = 0$$

für alle $f, g \in L^2(X, \mu)$ gilt.

(b) Zeige: Das maßerhaltende System $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ist genau dann schwach mischend, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, f\rangle - \langle f, 1\rangle\langle 1, f\rangle| = 0$$

für alle $f \in L^2(X, \mu)$ gilt.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 17. November** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.