Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
3. November 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x+1}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{12}$.

Hinweis: Verwende $\eta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s)$ für $s > 0$ und $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zu $d \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$ betrachten wir den Ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

und auf diesem die multiplikative Normabbildung:

$$N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{d} \mapsto a^2 - db^2.$$

(a) Zeige: $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist genau dann eine Einheit, wenn $N(x) \in \{\pm 1\}$.

Hinweis: Cayley-Hamilton.

(b) Finde eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] \setminus \mathbb{Z}$.

Hinweis: Zeige dazu: Es existieren $p_n(\sqrt{7})$ und $q_n(\sqrt{7})$ aus der Kettenbruchentwicklung, so dass $p_n(\sqrt{7})^2 - 7 \cdot q_n(\sqrt{7})^2 = 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir nennen $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ einen *unendlichen Wahrscheinlichkeitsvektor*, falls alle $p_i \geq 0$ sind und $\sum_i p_i = 1$ ist.

(a) Sei $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit Produkttopologie und Borelsigmaalgebra versehen und σ der Linksshift.

Zeige, dass jeder unendliche Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{p}$ ein σ-invariantes ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{p}^{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ induziert.

(b) Sei $\varphi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ die Kettenbruchabbildung aus der Vorlesung und μ das Gaußmaß auf $[0,1]$.

Zeige: Es gibt keinen unendlichen Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{p}$, der $\varphi_*^{-1}\mu = \mathbf{p}^{\mathbb{N}}$ erfüllt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es gibt verschiedene Arten Kettenbrüche zu definieren. Sei $\lceil x \rceil := \lfloor x+1 \rfloor$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir zu $\beta \in \mathbb{R}$:

$$b_0 := \lceil \beta \rceil,\ \beta_1 := -\frac{1}{\beta - b_0} \text{ und rekursiv: } b_{i+1} := \lceil \beta_{i+1} \rceil \text{ wobei } \beta_{i+1} := -\frac{1}{\beta_i - b_i}.$$

Damit setzen wir

$$(b_0; b_1, b_2, \dots) := b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots}}}$$

(a) Zeige folgende Relation der Kettenbruchentwicklungen:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = (a_0 + 1; \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{a_1 - 1}, a_2 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{a_3 - 1}, a_4 + 2, \dots)$$

(b) Berechne $\sqrt{7} = (b_0; b_1, b_2, \dots)$.

(c) Zeige: $\beta = (b_0; b_1, b_2, \dots)$ ist genau dann rational, wenn ein n existiert, so dass $b_k = 2$ für alle $k \geq n$.

Hinweis: Was ist $(2; 2, 2, \dots)$?

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 10. November** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.