Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
27. Oktober 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ein dynamisches System auf endlichem Maßraum.

Zeige: T ist genau dann ergodisch, wenn jedes messbare $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, das $f(Tx) \geq f(x)$ fast überall erfüllt, bereits fast überall konstant ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige: Das Produkt ergodischer Systeme ist nicht notwendigerweise ergodisch.

Genauer: Finde ergodische maßerhaltende Systeme $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ und $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S)$, für die $T \times S$ bezüglich des Produktmaßes $\mu \otimes \nu$ nicht ergodisch ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{X} := (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ein maßerhaltendes ergodisches System.

Zeige: $\mathfrak{X}$ ist genau dann ergodisch, wenn für alle $f, g \in L^2(X)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle U_T^n f, g\rangle = \langle f, 1\rangle \cdot \langle 1, g\rangle$$

gilt. Dabei bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das L^2-Skalarprodukt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ein invertierbares dynamisches System. Zeige, dass dann

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^{-n} x)$$

für beliebiges $f \in L^1(X)$ fast überall gilt.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 3. November** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.