Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
2. Februar 2015

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Für $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi_n \colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ die kanonische Projektion. Wir nennen $\Gamma[n] = \mathrm{Kern}\,\pi_n$ die *Hauptkongruenzgruppe* (mod n).

(a) Zeige: π_n ist surjektiv und somit ist $\Gamma[n]$ stets ein Normalteiler von endlichem Index.

Hinweis: Zeige zunächst: Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{ggT}(a + xb, c) = 1$.

(b) Gib ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\Gamma[2]$ in Γ an.

Hinweis: Wie viele Elemente hat $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

(c) Gib einen Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ von $\Gamma[2]$ in $\mathbb{H}$ an und beschreibe die Spitzen.

(d) Beschreibe die Menge der Punkte $x \in \mathcal{F}$, so dass die Bahn von x unter dem horozyklischen Fluss

a) periodisch ist;

b) dicht liegt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei Γ ein Gitter in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ und $X := \Gamma\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Für $x \in X$ sei δ_x das Dirac-Maß bei x und

$$\mu_{x,T} := \frac{1}{T}\int_0^T (R_{a_t})_*\delta_x \mathrm{d}t.$$

(a) Sei X kompakt und ν ein invariantes ergodisches Maß zum geodätischen Fluss.

Zeige: Es existiert $x \in X$, so dass $\nu = \lim\limits_{T\to\infty} \mu_{x,T}$.

(b) Finde $x \in X$ mit $\lim\limits_{T\to\infty} \mu_{x,T} = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige das *Schattenlemma* für den geodätischen Fluss auf $\Gamma\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$:

Für Punkte $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \varepsilon$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ und ein $z \in X$, so dass

$$\text{für } t \geq 0\colon d(R_{a_t}(x), R_{a_t}(z)) < \delta \text{ und}$$
$$\text{für } t \leq 0\colon d(R_{a_t}(y), R_{a_t}(z)) < \delta.$$

Hinweis: Wähle $y = x \cdot u^- a u^+$, mit $u^- \in U^-$, $u^+ \in U^+$ und $a = a_t$ für t klein genug.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 9. Februar** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.