Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
26. Januar 2015

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Seien $b, c \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ so dass $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

Zeige: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\varepsilon}{q^2}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt.

(b) Finde eine reelle, indefinite, nicht-degenerierte quadratische Form Q in zwei Variablen, die kein skalares Vielfaches einer Form mit ganzzahligen Koeffizienten ist, so dass $Q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ nicht dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Sei A eine symmetrische Matrix und $Q(x) = x^\top Ax$ die zugehörige quadratische Form.

Zeige: Q ist genau dann nicht degeneriert, wenn die Determinante von A ungleich 0 ist.

(b) Sei Q eine reelle, indefinite, nicht-degenerierte quadratische Form in n Variablen, die kein skalares Vielfaches einer ganzzahligen Form ist.

Zeige: Es existieren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}^n$ so dass

$$Q' \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto Q(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3)$$

eine indefinite, nicht-degenerierte quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$ ist, die kein skalares Vielfaches einer ganzzahligen Form ist.

Hinweis: Zeige zunächst: Es gibt $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^n$, mit $Q(v_1)/Q(v_2) < 0$ und irrational.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathrm{SO}(2,1)$ die spezielle orthogonale Gruppe der Signatur $(2,1)$, also

$$\mathrm{SO}(2,1) := \left\{A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) : A^\top \cdot I(2,1) \cdot A = I(2,1)\right\}, \text{ wobei } I(2,1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $\mathrm{SO}(2,1)$ unzusammenhängend ist.

Hinweis: Zeige, dass die Bahn des Vektors $(0,0,1)$ unter $\mathrm{SO}(2,1)$ unzusammenhängend ist. Zeige dafür, dass kein Vektor der Form $(a,b,0)$ in ihr liegt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) Sei $\mathfrak{so}(2,1) = \{A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) : A \cdot I(2,1) = -I(2,1) \cdot A^\top\}$.

Zeige, dass es einen Isomorphismus von Lie-Algebren $\phi\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{so}(2,1)$ gibt, der

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \ni u := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2,1)$$

fortsetzt.

Hinweis: Zeige zuerst: Mit $a := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $v := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \langle a, v, u \rangle$.

(b) Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V wird $\mathfrak{sl}(V) = \{A \in \mathrm{End}(V) : \mathrm{tr}\, A = 0\}$, mit der Lie-Klammer $[A,B] := AB - BA$ versehen, zu einer Lie-Algebra.

Sei $\mathrm{Ad} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})), x \mapsto (\mathrm{Ad}(x)\colon v \mapsto [\phi(x), v])$ die *adjungierte Darstellung.*

Zeige, dass $\mathrm{Kern}(\mathrm{Ad}(u))$ (in $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$) 2-dimensional ist.

(c) Sei $\rho\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(V)$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus.

Zeige, dass V keine echten $\rho(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$-invarianten Unterräume, die $\mathrm{Kern}\,\rho(u)$ enthalten, besitzt.

Folgere, dass für $\rho(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$-invariante Unterräume $W \subsetneq U \subseteq V$ auch

$$W \cap \mathrm{Kern}\,\rho(u) \subsetneq U \cap \mathrm{Kern}\,\rho(u)$$

gilt.

Hinweis: Verwende (ohne Beweis) die *Lefschetz-Zerlegung* von ρ:

Es existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ und eine Basis

$$\{w_{i,j} : 1 \le i \le n,\ 0 \le j \le \lambda_i\}$$

von V, so dass für alle i, j folgendes gilt:

a) $\rho(a)w_{i,j} = (2j - \lambda_i)w_{i,j}$,

b) $\rho(u)w_{i,j} = (\lambda_i - j)w_{i,j+1}$ und

c) $\rho(v)w_{i,j} = jw_{i,j-1}$.

(d) Folgere, dass $\phi(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) = \mathfrak{so}(2,1)$ eine maximale Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ ist.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 2. Februar** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.