Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
19. Januar 2015

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ein uniformes Gitter und $x \in X = \Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ fest, sowie

$$U^- := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

wie aus der Vorlesung bekannt. Zeige:

$$x \cdot U^- = \{ y \in X : \mathrm{d}(R_{a_t}(x), R_{a_t}(y)) \to 0 \text{ für } t \to +\infty \}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige, dass die abgeschlossene Untergruppe

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t/2} & s \\ 0 & \mathrm{e}^{-t/2} \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

kein Gitter enthält.

Hinweis: Verwende Proposition 11.10.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei G die Heisenberggruppe (siehe Übungsblatt 8) und $\Gamma := G \cap \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ eine diskrete Untergruppe.

(a) Zeige, dass $X := \Gamma \backslash G$ kompakt ist, aber die natürliche Multiplikation der Restklassen keine Gruppenstruktur besitzt.

Hinweis: Finde eine kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ auf der die Einschränkung der Quotientenabbildung surjektiv ist.

(b) Für $g \in G$, sei $R_g \colon X \longrightarrow X$ die Rechtsmultiplikation mit g. Zeige, dass R_g das auf X von G induzierte Haarmaß erhält.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Gib einen Gruppenisomorphismus $\phi\colon\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ an, der zu einem Homöomorphismus

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

absteigt.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 26. Januar** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.