Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
20. Oktober 2014

Ergodentheorie
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $R_\alpha \colon S^1 \longrightarrow S^1$, $\exp(x) \mapsto \exp(x+\alpha)$ die Rotation des Einheitskreises um den Winkel α und $T_2 \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \mapsto 2x \mod 1$ die Kreisverdopplung. Dabei sei, wie in der Vorlesung, $\exp(x) \coloneqq \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$.

Zeige: Die Systeme R_α und T_2 sind für *kein* α isomorph.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeige: Der Maßraum $(S^1, \mathcal{B}, \mu)$ ist isomorph zum Maßraum $(S^1 \times S^1, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \mu)$.

(b) Zeige: Die Systeme $T_4 \colon S^1 \longrightarrow S^1$ und $T_2 \times T_2 \colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ (definiert wie oben) sind isomorph.

Hinweis: Reißverschlussverfahren.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ein maßerhaltendes System. Wir nennen eine σ-Unteralgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, eine *$T$-invariante σ-Unteralgebra*, falls $T^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ bis auf μ-Nullmengen gilt. Weiterhin nennen wir das System $\mathfrak{X}$ eine *Erweiterung des Systems* $\mathfrak{Y}$, falls $\mathfrak{Y}$ ein Faktor von $\mathfrak{X}$ ist.

(a) Zu $\mathfrak{X}$ definieren wir nun das System $\widetilde{\mathfrak{X}} = (\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mu}, \widetilde{T})$ durch:

- $\widetilde{X} \coloneqq \{x = (x_k) \in X^{\mathbb{Z}} \mid x_{k+1} = T(x_k) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}$;
- $\big(\widetilde{T}(x)\big)_k \coloneqq x_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \widetilde{X}$;
- $\widetilde{\mu}(\{x \in \widetilde{X} \mid x_0 \in A\}) \coloneqq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}$ und $\widetilde{\mu}$ sei invariant unter $\widetilde{T}^{-1}$; sowie
- $\widetilde{\mathcal{B}}$ sei die kleinste $\widetilde{T}^{-1}$-invariante σ-Algebra, so dass $\pi \colon \widetilde{X} \longrightarrow X$, $x \mapsto x_0$ messbar ist.

Zeige: $\widetilde{\mathfrak{X}}$ ist ein invertierbares maßerhaltendes System und eine Erweiterung von $\mathfrak{X}$ vermöge der Abbildung $\pi \colon \widetilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{X}$, $x \mapsto x_0$.

Wir nennen $\widetilde{\mathfrak{X}}$ die *invertierbare Erweiterung* von $\mathfrak{X}$.

(b) Zeige: $\widetilde{\mathfrak{X}}$ genügt folgender universellen Abbildungseigenschaft: Für jede Erweiterung $\phi \colon \mathfrak{Y} = (Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S) \longrightarrow \mathfrak{X}$ mit invertierbarem S existiert genau eine Abbildung $\widetilde{\phi} \colon \mathfrak{Y} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{X}}$, die das folgende Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y} \arrow[r, dashed, "\exists!\widetilde{\phi}"] \arrow[dr, "\phi"'] & \widetilde{\mathfrak{X}} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X ein metrischer Raum mit Borelwahrscheinlichkeitsmaß μ.

(a) Sei X kompakt und $T\colon X \longrightarrow X$ stetig und maßerhaltend. Zeige: Für fast alle $x \in X$ gibt es eine Folge (n_k), so dass $T^{n_k}(x) \to x$ für $k \to \infty$.

Hinweis: Poincarés Rekurrenzsatz. Außerdem: Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.

(b) Sei nun $T\colon X \longrightarrow X$ ergodisch und zusätzlich sei das Maß jeder nicht-leeren offenen Menge positiv. Zeige: Für fast alle $x \in X$ ist die Bahn $\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in X.

Hinweis: Poincarés Rekurrenzsatz. Außerdem: Eine Menge liegt genau dann dicht, wenn sie mit jeder offenen Menge nichtleeren Schnitt hat.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Montag, den 27. Oktober** in den Kasten im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6 oder vor Beginn der Vorlesung direkt dort.