Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2014
18. Februar 2014

Blockseminar
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Blockseminar

Schnitttheorie

Sommersemester 2014

16.–18. Mai

Ziel des Blockseminars ist es, mit Hilfe von Schnitttheorie ein paar klassische Probleme aus der enumerativen algebraischen Geometrie zu lösen. Haupthilfsmittel wird dabei das neue Buchprojekt [EH13] sein. Um dieses Ziel zu erreichen, werden einige Methoden aus der algebraischen Geometrie verwendet werden, die zum Beispiel in [Vak12] sehr ausführlich beschrieben sind. Klassisch, wenn vielleicht auch etwas trocken, ist [Har77]; weniger trocken und oft sehr anschaulich, dafür manchmal etwas schwammig, ist [EH00] und ein Blick in [GW10] lohnt sich allein schon wegen der Zusammenfassung verschiedener Morphismen im Anhang. Der Klassiker zu Schnitttheorie, [Ful84], soll auch nicht unerwähnt bleiben.

1. **Einführung/Motivation** — JENS HEINRICH

   In diesem Vortrag soll zunächst erklärt werden, was unter einem *enumerativen Problem* zu verstehen ist. Dann sollen anhand anschaulicher Beispieler das Konzept des *Schnittprodukts* bzw. der *Multiplizitäten* (anschaulich zum Beispiel am Auftreten *nichtreduzierter Punkte*) erläutert werden. Außerdem soll der *Satz von Bézout* erwähnt und an Beispielen verdeutlicht werden.

   Literatur: [EH13, §2.1], [Har77, §I.7], [Vak12, §4.2], evtl. auch [EH00, §III.3.5].

2. **Der Chowring** — FABIAN MATERN

   Ziel des Vortrags ist es, die grundlegenden Definitionen von *Zykeln*, *rationaler Äquivalenz* und *Chowgruppen* einzuführen. Die Ringstruktur soll erklärt und *Chow's Moving Lemma* sowie *Funktorialität* zitiert werden. Außerdem sollten *Divisoren* und *Geradenbündel* wiederholt werden und zu diesen die *erste Chernklasse* eingeführt werden.

   Literatur: [EH13, §1.1].

3. **Erste Beispiele** Max Bieri

   In diesem Vortrag sollen mit Hilfe der Ergebnisse des vorherigen Vortrags die ersten Chowringe ausgerechnet werden. Insbesondere soll eine explizite Darstellung von $A(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ gegeben werden und die *Gradabbildung* eingeführt werden. Dafür muss das Konzept des Schnitts mit einer allgemeinen Hyperebene erläutert werden (und wie das mit dem Pullback von $\mathcal{O}(1)$ zusammenhängt), sowie das Prinzip der *affine stratification* eingeführt werden, wofür wiederum das *Excision*-Prinzip erklärt und verwendet werden sollte.

   Literatur: [EH13, §1.2, §1.3].

4. **Schnitttheorie auf Flächen und Chernklassen** Frederik Benirschke

   Hier geht es um klassische *Schnitttheorie auf Flächen.* Insbesondere sollte die *Adjunction Formula* vorkommen und anhand von Beispielen veranschaulicht werden. Dazu muss an das *kanonische Bündel* und das *Normalenbündel* erinnert werden. Außerdem werden *Chernklassen* für Garben, die *von globalen Schnitten erzeugt* werden, definiert.

   Literatur: [EH13, §1.4, 1.5], sowie [Vak12, §20.2, 21.3]. Evtl. auch [Har77, §V.1 und appendix A].

5. **Konstruktion der Grassmannschen** Malaika Wittmann

   In diesem Vortrag wird an die Konstruktion der *Grassmannschen* erinnert. Mit Hilfe der *Plücker Einbettung* wird sie mit einer projektiven Struktur versehen und auf die *universelle Familie* sollte eingegangen werden. Dabei sollte der Begriff *Modulraum* fallen. Um die Geometrie zu verstehen, müssen wir das *Tangentialbündel* der Grassmannschen verstehen; dafür muss zunächst die *Eulersequenz* wiederholt werden.

   Literatur: [EH13, §2.2], [EH00, §III.2.7 und evtl. VI.2.3], [Vak12, §21.4].

6. **Geometrie der Grassmannschen am Beispiel $\mathbb{G}(1,3)$** Şevda Kurul

   Um Grassmannsche, ihre Geometrie und ihre Schnitttheorie zu verstehen, wollen wir zunächst $\mathbb{G}(1,3)$ betrachten. Hiervon soll der Chowring *explizit berechnet* werden. Dadurch werden wir die ersten *enumerativen Formeln* erhalten. Außerdem soll für diesen Spezialfall schon einmal der *Schubertkalkül* beschrieben werden.

   Literatur: [EH13, §2.3–2.4].

7. **Der Schubertkalkül** Kolja Hept

   Nun kommt die allgmeine Definition von *Schubertzellen* und *Schubertzykeln.* Mit Hilfe dieser kann man das Schnittprodukt auf der Grassmannschen beschreiben, da man mit Hilfe von *Flaggen* zeigen kann, dass sich alle Berechnungen auf Schnitte von Schubertzykeln reduzieren lassen. Dazu kann man nun eine Reihe von Beispielen präsentieren, z.B. kann man den Grad von $\mathbb{G}(1,n)$ unter der Plückereinbettung bestimmen. Wenn man so etwas lustig findet, kann man auch Schubertzykel und Young-Diagramme verbinden :)

Literatur: [EH13, §3].

8. **Mehr zu Chowgruppen** JAKOB HUEWER

   In diesem Vortrag wird viel aus Vortrag 2. aufgegriffen und konkretisiert bzw. bewiesen. Dazu wird zunächst an das *Hilbertpolynom* erinnert, bevor nochmal ausführlicher *rationale Äquivalenz* und *Funktorialität* der Chowgruppen diskutiert werden. Dann sollte noch auf das Konzept der *Dynamic Projection* zur Konstruktion rationaler Äquivalenzen eingegangen werden und als Beispiel kann vielleicht der Zusammenhang zwischen Pushforward und der *Normabbildung* gezeigt werden.

   Literatur: [EH13, §4].

9. **Schnittprodukte** MATTEO CONSTANTINI

   Jetzt soll gezeigt werden, dass es tatsächlich ein *Schnittprodukt* gibt, das eine (graduierte) *Ringstruktur* auf den Chowgruppen induziert. Das geschieht mit Hilfe von *Chows Lemma*, welches uns auf glatten Varietäten erlaubt, uns auf transversale Zykeln zu beschränken. Spätestens hier sollte noch etwas zum *Satz von Kleimann* gesagt werden. Außerdem sollte ein Ausblick zu Schnittprodukten auf *singulären* Varietäten gegeben werden. Möglichst sollte noch ein *Gegenbeispiel* vorkommen, das zeigt, was im allgemeinen Fall alles schieflaufen kann und dass es auf allgemeineren Varietäten kein Schnittprodukt geben muss/kann. Vermutlich bleibt dann keine Zeit mehr, auf die *Cone construction* einzugehen.

   Literatur: [EH13, §5].

10. **Vektorbündel** QUENTIN GENDRON

    Hier werden *Chern-Klassen* allgemeiner definiert, als wichtige Aussagen sollten die *Whittney-Formel* und das *Splitting Principle* erklärt werden.

    Literatur: [EH13, §6,7].

11. **Geraden zählen** RALF BUTENUTH

    Hier muss am Ende *27* rauskommen.

    Literatur: [EH13, §8].

Literatur

[EH00] David Eisenbud und Joe Harris. *The Geometry of Schemes*. Graduate Texts in Mathematics 197. Springer, 2000.

[EH13] David Eisenbud und Joe Harris. „3264 & All That. Intersection Theory in Algebraic Geometry“. Book project. 2013. URL: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic720403.files/book.pdf.

[Ful84] William Fulton. *Intersection Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge 2. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[GW10] Ulrich Görtz und Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I. Schemes*. Advanced Lectures in Mathematics. Wiesbaden: Viehweg+Teubner, 2010.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. New York: Springer, 1977.

[Vak12] Ravi Vakil. „Foundations of Algebraic Geometry“. Lecture notes. 2012. URL: http://math216.wordpress.com/.