Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
6. Mai 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 2

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass

$$+ \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (a,b) \mapsto a+b$$

eine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$ ist.

Ist $- \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto a-b$ eine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$?

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge M mit Verknüpfung $\circ$, so dass $(M, \circ)$

(i) die Axiome (N), (I), (A) aber nicht (K) erfüllt;

(ii) die Axiome (N), (K), (A) aber nicht (I) erfüllt;

(iii) die Axiome (K), (A) aber nicht (I) und (N) erfüllt.

Aufgabe 2

Sei $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe und $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass

$$p_n \colon G \to G, \quad g \mapsto g^n$$

ein Homomorphismus ist.

Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe an, für die p_n kein Homomorphismus ist.

Aufgabe 3

(a) Sei $G = \{\pm 1\} \subset \mathbb{Z}$. Mit der gewöhnlichen Multiplikation von $\mathbb{Z}$ wird dies zu einer Gruppe. Stellen Sie die Verknüpfungstafel von G auf.

(b) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $y \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$m_y \colon G \to G, \quad x \mapsto y \cdot x$$

bijektiv ist. Was bedeutet dies für die Verknüpfungstafel einer Gruppe?

Aufgabe 4

(a) Sei $(G, \circ) = (\{e, a, b, c\}, \circ)$ eine Gruppe mit Neutralelement e. Geben Sie alle möglichen Verknüpfungstafeln zu $(G, \circ)$ an. Welche sind isomorph?

(b) Geben Sie eine Verknüpfungstafel zu einer sechs-elementigen Gruppe an, die nicht isomorph zu S_3 ist.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.