Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
27. Mai 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $t \in \mathbb{C}$ und $A_t \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2t^2 - 2 \\ 3t & -6t + 1 & -3t^3 - 3t \\ 0 & 6 & 3t^2 + 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie A_t mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform Z_t und schreiben Sie Z_t als Produkt von A_t mit geeigneten Elementarmatrizen.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $A_t \cdot x = 0$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 4 \\ 3 & 12 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform und schreiben Sie diese als Produkt von A mit Elementarmatrizen.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$. Ist $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$?

(c) Betrachten Sie nun A als Element von $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_2)$ und bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$. Ist $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $i, j \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir das *Kronecker-δ*, als

$$\delta \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}, \quad (i, j) \mapsto \delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Dann definieren wir zu $\pi \in S_n$ die *Permutationsmatrix*

$$A_\pi := (\delta_{i,\pi(j)})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{Mat}_n(K).$$

Zeigen Sie: Es gilt $A_{\pi \circ \rho} = A_\pi \cdot A_\rho$ für alle $\pi, \rho \in S_n$ und folgern Sie daraus, dass für alle $\pi \in S_n$ die Matrix $A_\pi \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist und die Abbildung $\pi \mapsto A_\pi$ ein Gruppenhomomorphismus $S_n \to \mathrm{GL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wir definieren die *oberen Dreiecksmatrizen*

$$\Delta(n) := \{A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K) : a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\}.$$

Zeigen Sie: $\Delta(n) \subseteq \mathrm{Mat}_n(K)$ ist ein (Unter-)Ring.

(b) Finden Sie ein Element $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$, so dass $A \neq 0$, aber $A^2 = 0$.

Zusatzaufgabe

Finden Sie die zehn LA-Begriffe und stellen Sie sicher, dass Sie alle definieren und verwenden können!

E	J	L	X	I	R	T	A	M	S	T	I	E	H	N	I	E	S
V	L	N	O	U	P	T	S	G	Z	R	A	T	B	X	U	Z	U
V	C	E	K	E	B	N	U	L	L	Z	E	I	L	E	E	I	M
Q	H	W	M	Z	S	X	M	U	O	E	K	W	N	I	K	Y	H
B	N	O	H	E	C	U	X	K	O	K	N	G	L	Q	M	R	T
Y	E	E	M	D	N	L	N	D	E	J	P	E	X	W	H	T	I
W	T	Y	V	O	J	T	G	G	S	S	N	M	V	V	C	B	R
A	L	P	T	O	G	V	A	G	S	S	Y	U	Y	D	H	E	O
L	A	G	P	S	S	E	F	R	T	V	M	O	M	N	D	N	G
X	P	P	K	U	M	R	N	U	M	W	E	Z	A	Q	J	Q	L
Q	S	N	D	N	R	V	F	S	E	A	O	K	E	J	L	R	A
R	T	X	F	W	B	E	D	U	E	L	T	B	T	R	L	G	S
L	O	F	I	P	N	T	A	W	X	T	M	R	N	O	X	K	S
F	V	D	C	F	M	G	P	D	J	U	K	E	I	Q	R	B	U
C	I	Z	O	O	G	P	W	K	O	A	M	U	L	Z	I	Q	A
O	P	R	M	Z	N	X	B	N	X	L	P	A	I	Z	E	F	G
T	M	Q	X	T	N	E	M	E	L	E	T	O	V	I	P	N	T
V	M	E	T	S	Y	S	S	G	N	U	H	C	I	E	L	G	Q

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 3. Juni** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.